



Bachelor Betriebswirtschaft

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Michael Bucker

Prof. Dr. Michael Bucker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte
- 4 Funktionen
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
- 6 Integralrechnung
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen**



Kapitel 7:

Differentialrechnung II (Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen)

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen
 - 7.1 Einführendes Beispiel
 - 7.2 Graphische Einführung in die Differentialrechnung II
 - 7.3 Grundzüge der Differentialrechnung für Funktionen
mehrerer Variablen
 - 7.4 Ökonomische Anwendungen
 - 7.5 Optimierungstheorie

7.1 Einführendes Beispiel

- Ein Unternehmen stellt zwei Produkte aus zwei Rohstoffen her. Rohstoff 1 kostet 4 € pro ME, Rohstoff 2 kostet 2 € pro ME. Zur Produktion von Produkt 1 benötigt man 2 ME von Rohstoff 1 und 3 ME von Rohstoff 2, zur Produktion von Produkt 2 benötigt man 4 ME von Rohstoff 1 und 5 ME von Rohstoff 2.

Produkt 1 und 2 werden nach den folgenden Preis-Absatz-Funktionen verkauft: $p_1(x_1) = 100 - x_1$, $p_2(x_2) = 200 - x_2$.

x_1 sei dabei die Anzahl der hergestellten Produkte 1, x_2 sei die Anzahl der hergestellten Produkte 2.

$$\begin{aligned}\text{Gewinn} = G(x_1, x_2) &= (100 - x_1) \cdot x_1 + (200 - x_2) \cdot x_2 \\ &\quad - (2 \cdot 4 + 3 \cdot 2) \cdot x_1 - (4 \cdot 4 + 5 \cdot 2) \cdot x_2 \\ &= 86 x_1 - x_1^2 + 174 x_2 - x_2^2\end{aligned}$$

Wie viele Produkte vom Typ 1 (x_1) und vom Typ 2 (x_2) soll das Unternehmen herstellen, um seinen Gewinn zu maximieren? (Lsg.: $x_1 = 43$, $x_2 = 87$) 5

7.2 Grundzüge der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

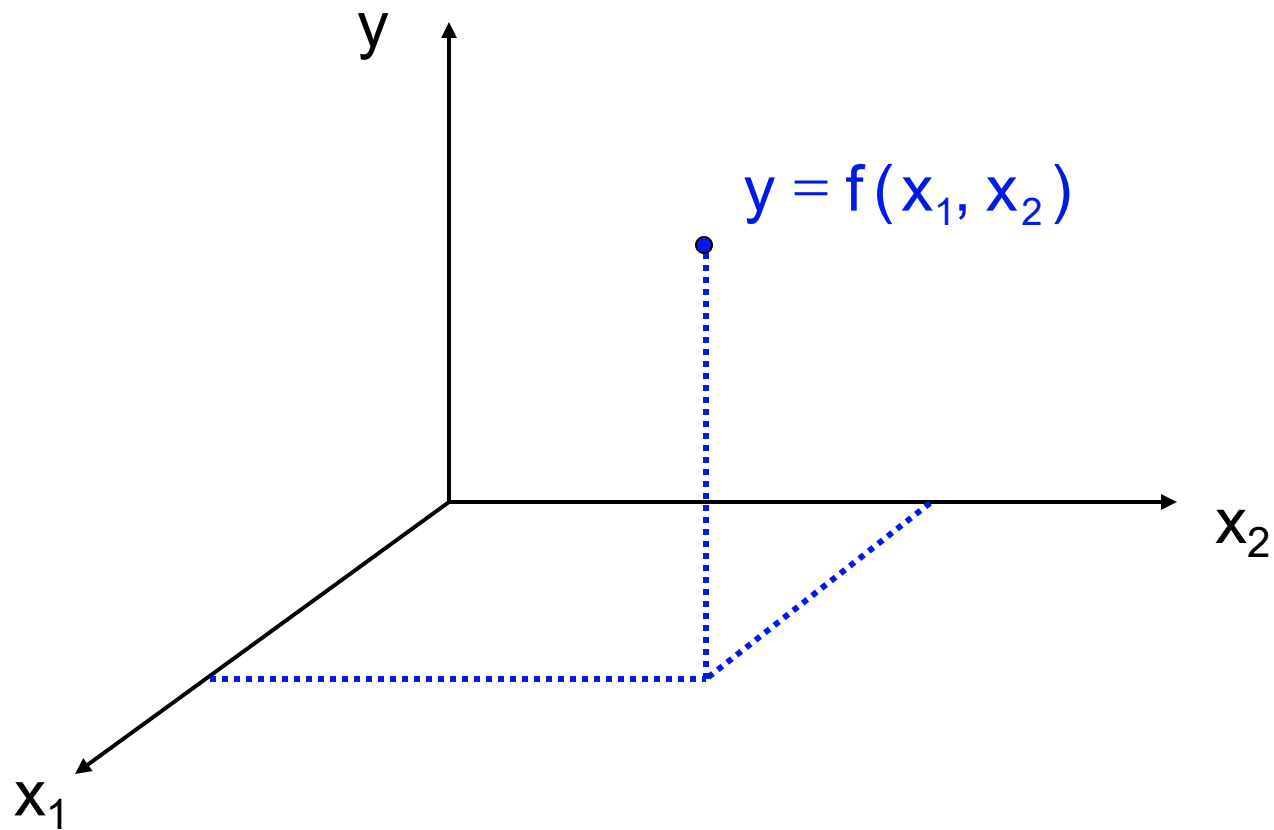
7.2 Graphische Einführung in die Differentialrechnung II

7.2.1 **Beispiel** für eine Funktion mit zwei Variablen

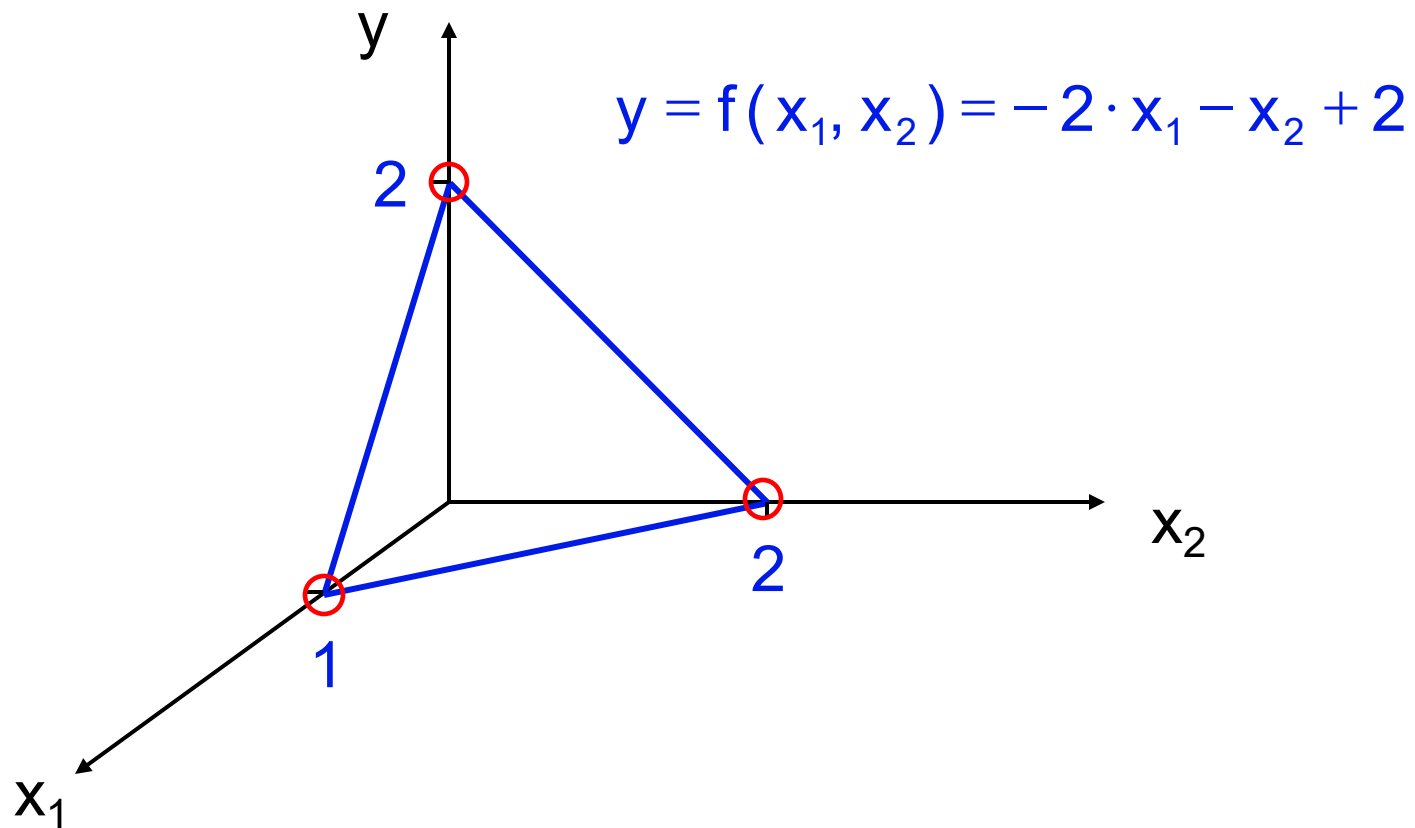
7.2.2 **Horizontalschnitt** und **Höhenlinie**

7.2.3 **Vertikalschnitt**

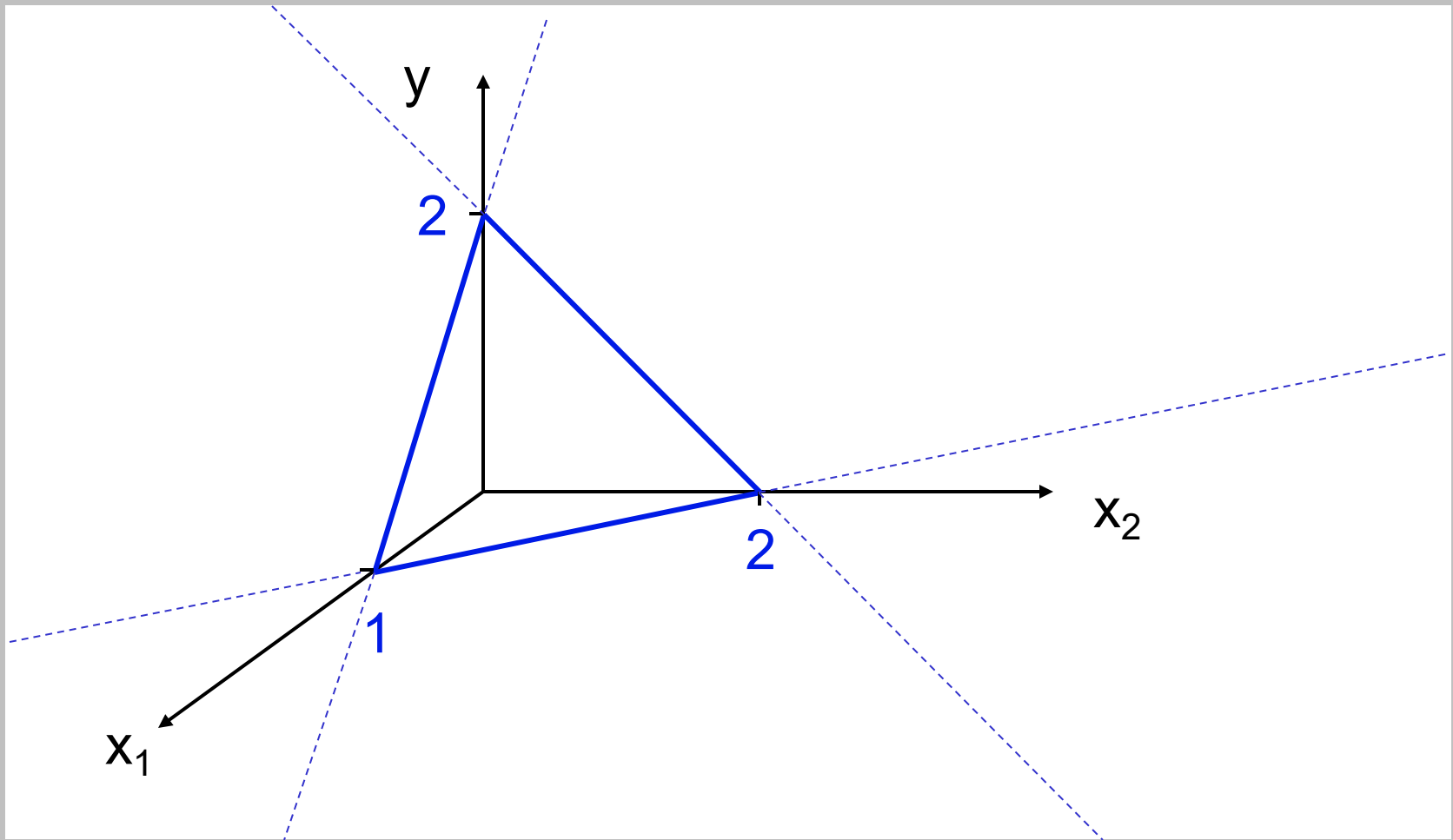
7.2 Graphische Einführung



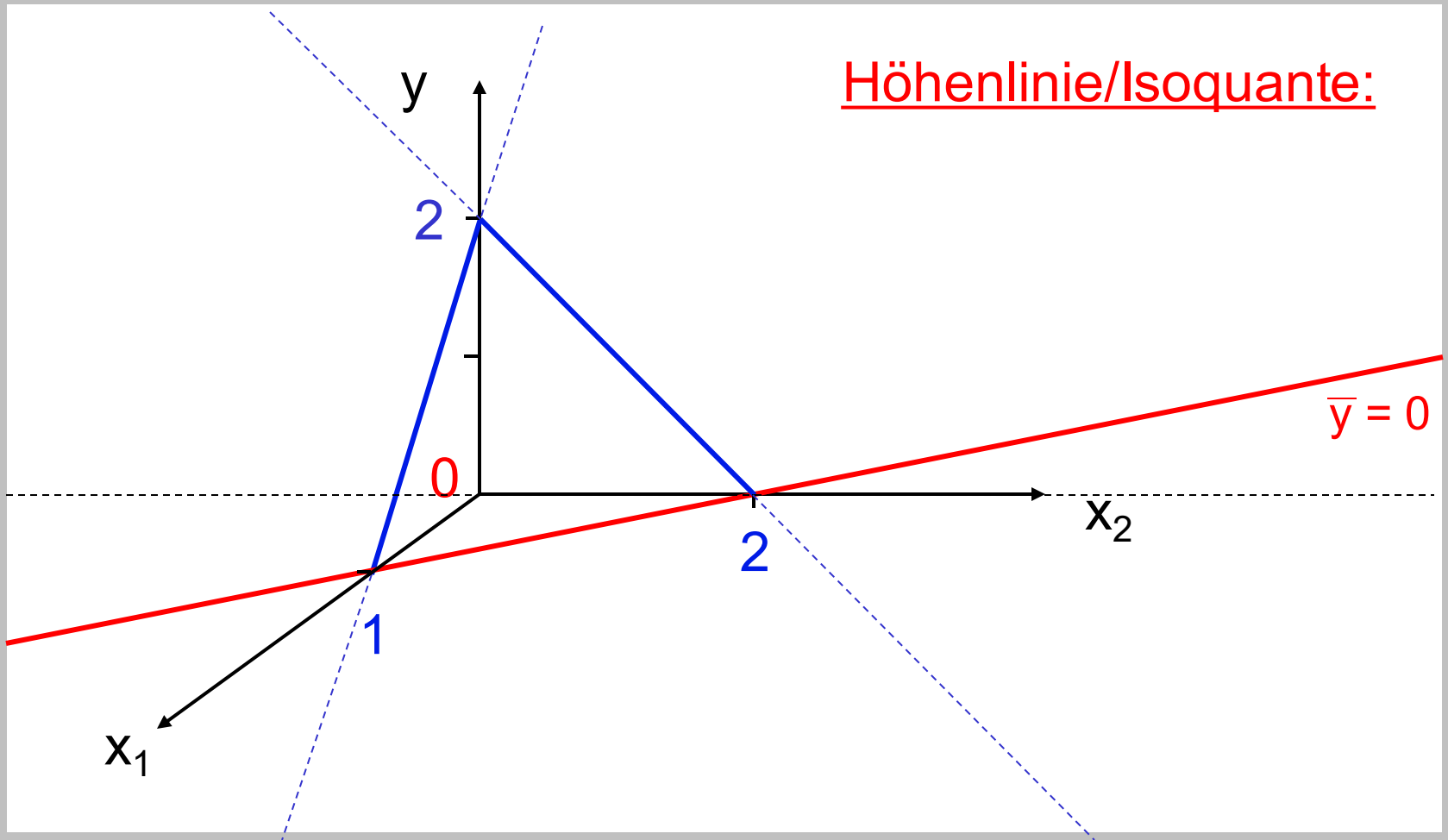
7.2.1 Beispiel für eine Funktion mit zwei Variablen



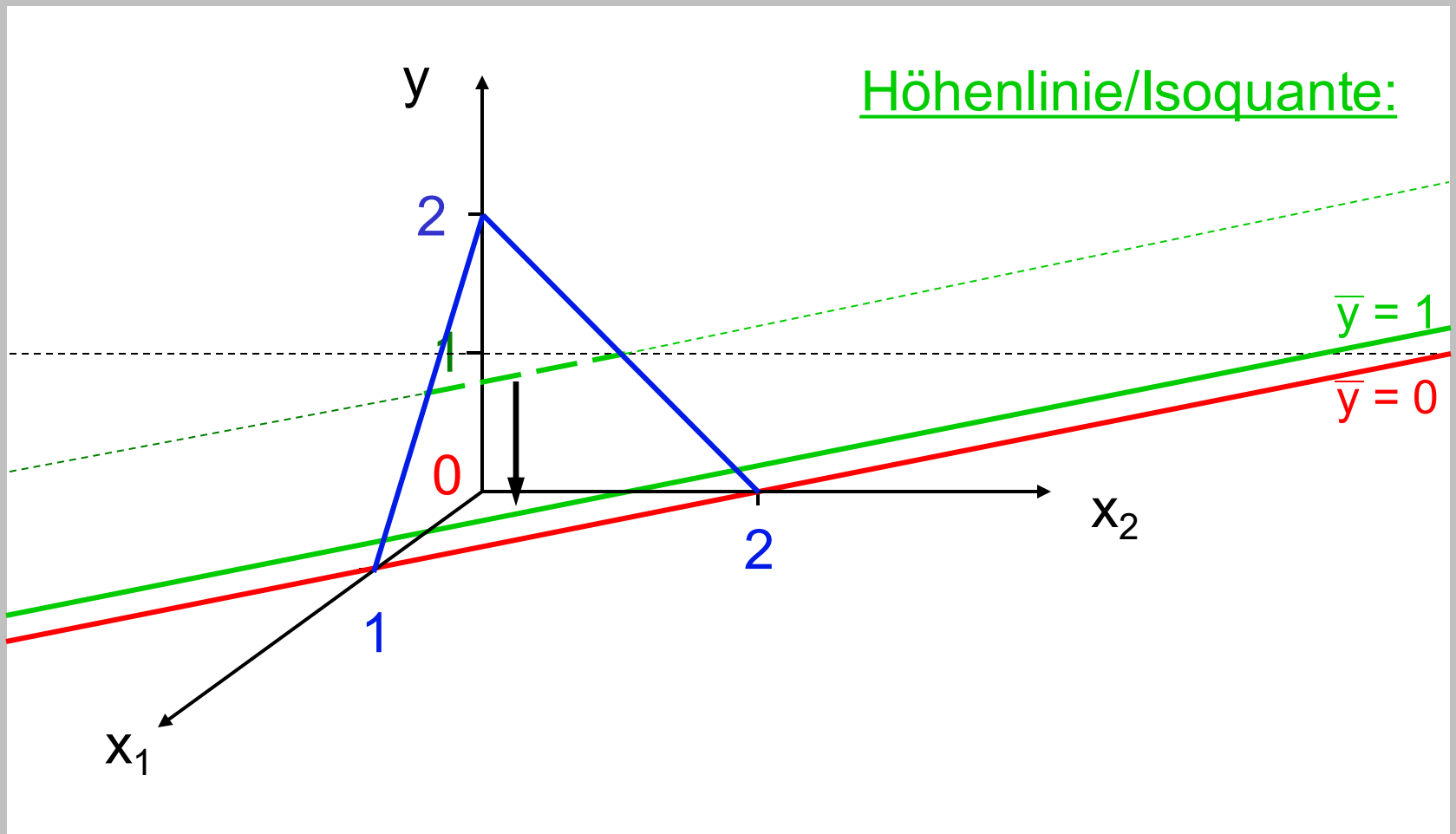
7.2.1 Beispiel für eine Funktion mit zwei Variablen



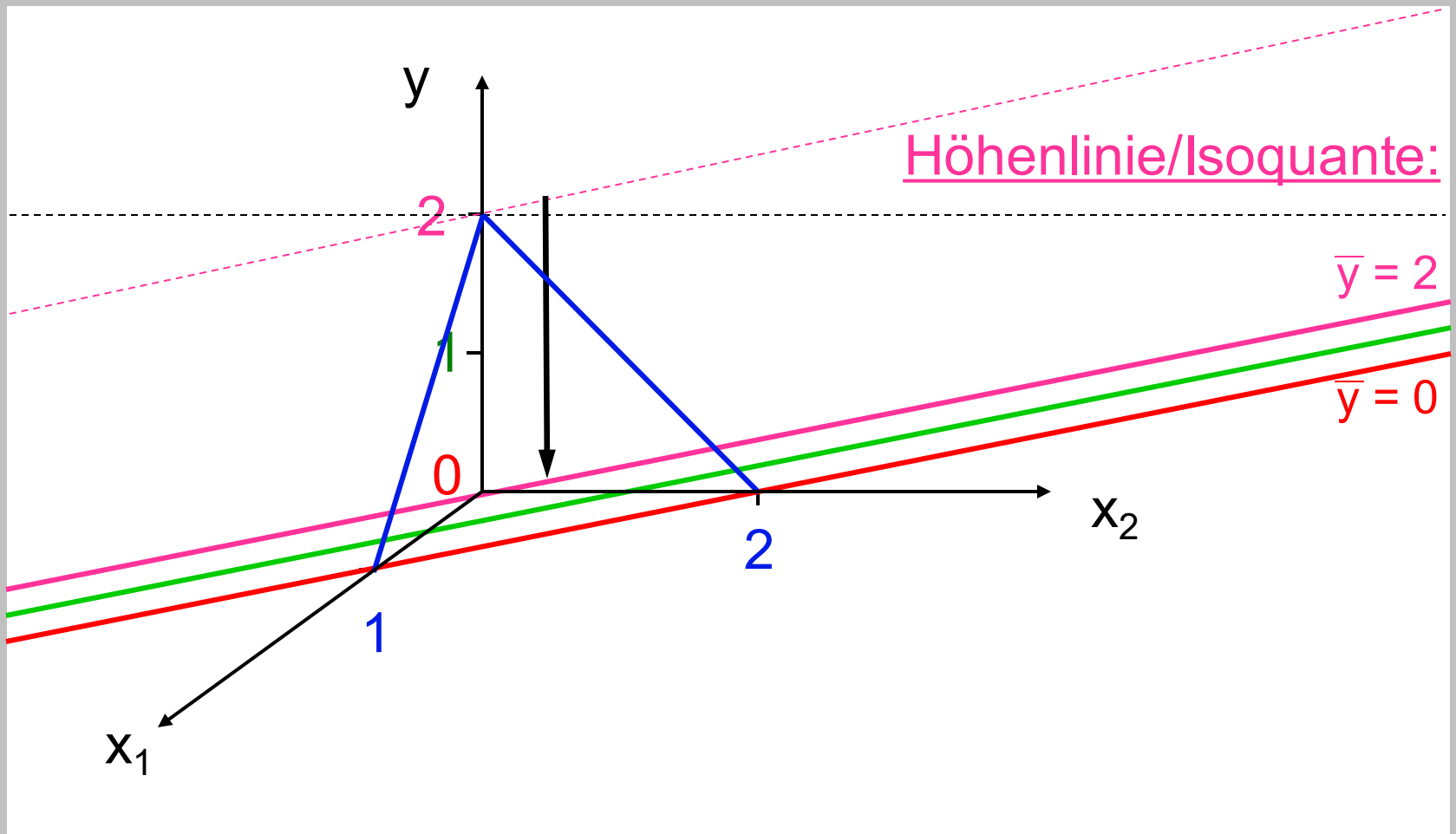
7.2.1 Beispiel für eine Funktion mit zwei Variablen



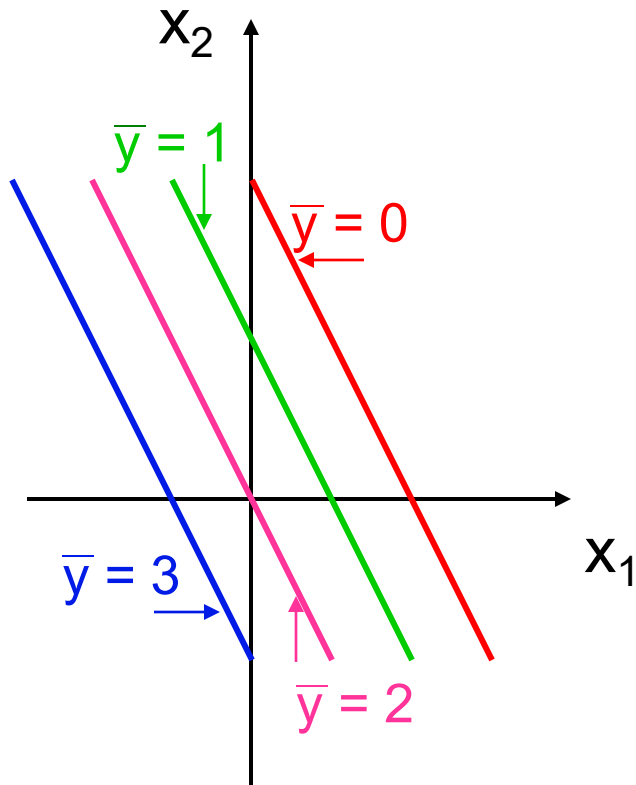
7.2.1 Beispiel für eine Funktion mit zwei Variablen



7.2.1 Beispiel für eine Funktion mit zwei Variablen



7.2.2 Horizontalschnitt und Höhenlinie



Höhenlinie/Isoquante:

$$f(x_1, x_2) = -2 \cdot x_1 - x_2 + 2 = \bar{y}$$
$$\Rightarrow x_2 = -2 \cdot x_1 + 2 - \bar{y}$$

$$\Rightarrow \text{für } \bar{y} = 0: x_2 = -2 \cdot x_1 + 2$$

$$\text{für } \bar{y} = 1: x_2 = -2 \cdot x_1 + 1$$

$$\text{für } \bar{y} = 2: x_2 = -2 \cdot x_1$$

$$\text{für } \bar{y} = 3: x_2 = -2 \cdot x_1 - 1$$

7.2.2 Horizontalschnitt und Höhenlinie

➤ **Horizontalschnitt** parallel zur (x_1, x_2) -Ebene

⇒ **Höhenlinie** bzw. **Isoquante**

⇒ gibt den Zusammenhang zweier unabhängiger Variablen (x_1, x_2) an für einen gegebenen Wert der abhängigen Variablen (y)

$$x_2 = f(\bar{y}, x_1) \quad \text{bzw.} \quad x_1 = f(\bar{y}, x_2)$$

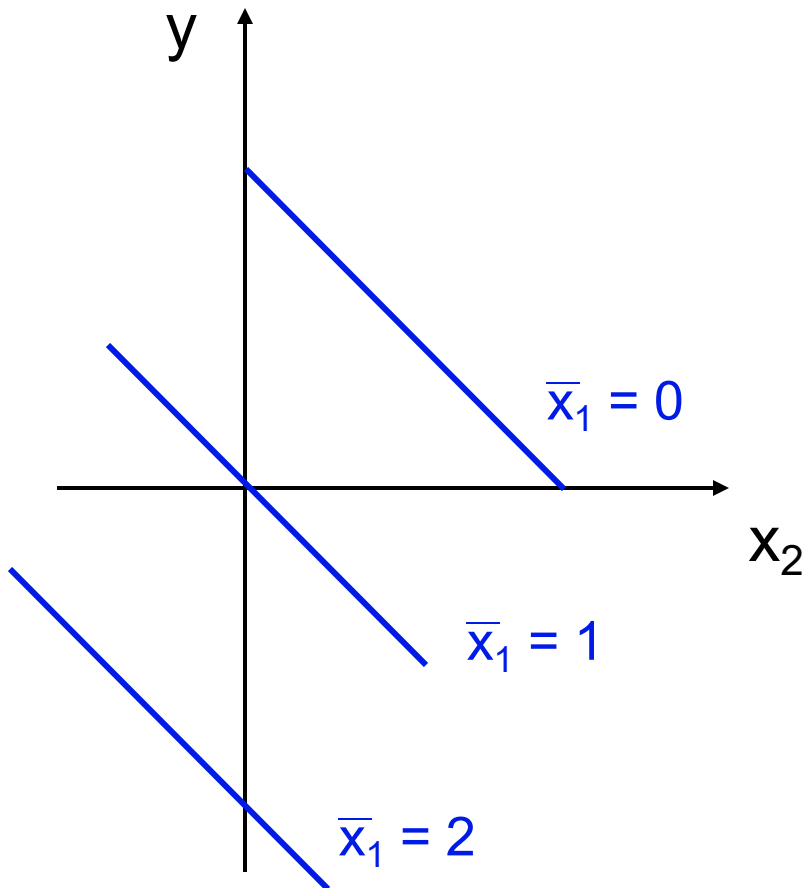
➤ **Grenzrate der Substitution (Substitutionsrate)**

⇒ die **Steigung der Isoquante** in einem Punkt (im Beispiel: -2)

⇒ gibt die Einheiten an, die notwendig sind, um bei konstantem y eine infinitesimal kleine Einheit von x_2 durch x_1 zu ersetzen (oder umgekehrt)

$$\frac{dx_2}{dx_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx_1}{dx_2}$$

7.2.3 Vertikalschnitt



Vertikalschnitt:

$$f(\bar{x}_1, x_2) = -2 \cdot \bar{x}_1 - x_2 + 2 = y$$

$$\Rightarrow \text{für } \bar{x}_1 = 0: y = -x_2 + 2$$

$$\text{für } \bar{x}_1 = 1: y = -x_2$$

$$\text{für } \bar{x}_1 = 2: y = -x_2 - 2$$

7.2.3 Vertikalschnitt

➤ Vertikalschnitt

⇒ Eine unabhängige Variable (z.B. x_1) wird konstant gesetzt. Analysiert wird der Zusammenhang zwischen der abhängigen Variable y und der anderen unabhängigen Variablen (z.B. x_2).

$$y = f(\bar{x}_1, x_2) \quad \text{bzw.} \quad y = f(x_1, \bar{x}_2)$$

➤ Grenzproduktivität (z.B. bei einer Produktionsfunktion)

⇒ gibt die marginale Veränderung der abhängigen Variablen y (z.B. die Ausbringungsmenge) an einer bestimmten Stelle an aufgrund einer infinitesimal kleinen Veränderung des einen Produktionsfaktors (x_1) bei Konstanz des anderen Produktionsfaktors (x_2) oder umgekehrt

$$\frac{dy}{dx_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx_2}$$

7.3 Grundzüge der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

7.3 Grundzüge der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

7.3.1 Partielle Ableitungen erster Ordnung, Gradient

7.3.2 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung,
Hessesche Matrix

7.3.3 Partielle Differentiale und totales Differential

7.3.4 Partielle Elastizitäten

7.3.5 Homogenität

7.3.1 Partielle Ableitungen erster Ordnung, Gradient

➤ Partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2}(x_1, x_2)$$

(„ ∂ “ steht für partielle Ableitung, „ d “ für totale Ableitung)

➤ Gradient:

⇒ „Vektor der partiellen Ableitungen“

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

7.3.2 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung, Hessesche Matrix

➤ Partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \begin{cases} \nearrow f_{x_1 x_1} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_1} \\ \searrow f_{x_1 x_2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \end{cases}$$

$$f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \begin{cases} \nearrow f_{x_2 x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} \\ \searrow f_{x_2 x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_2} \end{cases}$$

7.3.2 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung, Hessesche Matrix

➤ Hessesche Matrix:

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{bmatrix}$$

bzw. für n Variablen:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

7.3.3 Partielle Differentiale und totales Differential

➤ Partielles Differential:

$$d_1 f = f_{x_1}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1$$

$$d_2 f = f_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$$

➤ Totales Differential:

⇒ Summe der partiellen Differentiale

$$\begin{aligned} df &= f_{x_1}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_1 + f_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_2 \\ &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \end{aligned}$$

7.3.4 Partielle Elastizitäten

➤ Partielle Elastizitätsfunktionen:

$$\varepsilon_{yx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y}$$

$$\varepsilon_{yx_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y}$$

7.3.5 Homogenität

- Eine Funktion f ist **homogen vom Grade r** , wenn gilt:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^r \cdot f(x_1, x_2)$$

- Man unterscheidet folgende Fälle:

1. **überlinear-homogen**, falls $r > 1$
2. **linear-homogen**, falls $r = 1$
3. **unterlinear-homogen**, falls $r < 1$

- **Satz:**

Die Summe der partiellen Elastizitäten einer homogenen Funktion ist gleich dem Homogenitätsgrad!

7.3.5 Homogenität (Beispiel)

- Beispiel einer überlinear-homogenen Produktionsfunktion:

$$x = f(r_1, r_2) = r_1^1 \cdot r_2^2$$

Die Faktoreinsatzmengen werden nun allgemein mit dem Faktor λ oder im Beispiel mit $\lambda = 2$ vervielfacht:

$$\begin{aligned} f(\lambda r_1, \lambda r_2) &= (\lambda r_1)^1 \cdot (\lambda r_2)^2 & \text{bzw. } f(2r_1, 2r_2) &= (2r_1)^1 \cdot (2r_2)^2 \\ &= \lambda^1 \cdot r_1^1 \cdot \lambda^2 \cdot r_2^2 & &= 2^1 \cdot r_1^1 \cdot 2^2 \cdot r_2^2 \\ &= \lambda^{1+2} \cdot r_1^1 \cdot r_2^2 & &= 2^{1+2} \cdot r_1^1 \cdot r_2^2 \\ &= \lambda^3 \cdot f(r_1, r_2) & &= 2^3 \cdot f(r_1, r_2) = 8 \cdot f(r_1, r_2) \end{aligned}$$

Die Funktion ist homogen vom Grade 3 (überlinear-homogen):
Bei Verdopplung des Inputs verachtfacht sich der Output.

7.3.5 Homogenität (Beispiel)

- Beispiel einer **Cobb-Douglas-Produktionsfunktion**
(Summe der Exponenten = 1):

$$x = f(r_1, r_2) = r_1^{0,3} \cdot r_2^{0,7}$$

Die Faktoreinsatzmengen werden nun allgemein mit dem Faktor λ oder im Beispiel mit $\lambda = 2$ vervielfacht:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda r_1, \lambda r_2) &= (\lambda r_1)^{0,3} \cdot (\lambda r_2)^{0,7} & \text{bzw. } f(2r_1, 2r_2) &= (2r_1)^{0,3} \cdot (2r_2)^{0,7} \\
 &= \lambda^{0,3} \cdot r_1^{0,3} \cdot \lambda^{0,7} \cdot r_2^{0,7} & &= 2^{0,3} \cdot r_1^{0,3} \cdot 2^{0,7} \cdot r_2^{0,7} \\
 &= \lambda^1 \cdot r_1^{0,3} \cdot r_2^{0,7} & &= 2^1 \cdot r_1^{0,3} \cdot r_2^{0,7} \\
 &= \lambda^1 \cdot f(r_1, r_2) & &= 2^1 \cdot f(r_1, r_2)
 \end{aligned}$$

Die Funktion ist homogen vom Grade 1 (**linear-homogen**):

Bei Verdopplung des Inputs verdoppelt sich der Output.

7.3.5 Homogenität (Beispiel)

- Die **Summe der partiellen Elastizitäten** einer homogenen Funktion ist **gleich dem Homogenitätsgrad**!

$$x = f(r_1, r_2) = r_1^{0,3} \cdot r_2^{0,7}$$

$$\varepsilon_{yx_1} + \varepsilon_{yx_2} = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot \frac{r_1}{x} + \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot \frac{r_2}{x}$$

$$= 0,3 \cdot r_1^{-0,7} \cdot r_2^{0,7} \cdot \frac{r_1}{r_1^{0,3} \cdot r_2^{0,7}} + 0,7 \cdot r_2^{-0,3} \cdot r_1^{0,3} \cdot \frac{r_2}{r_1^{0,3} \cdot r_2^{0,7}}$$

$$= 0,3 + 0,7 = 1$$

7.4 Ökonomische Anwendungen

7.4 Ökonomische Anwendungen

7.4.1 Beispiel Preisdifferenzierung

7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion:
Das Ertragsgesetz und
die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

7.4.1 Beispiel Preisdifferenzierung

- Ein Unternehmen lässt sein Produkt in Portugal zentral für die beiden Märkte Deutschland und Italien produzieren. Die **Kostenfunktion** lautet: $K(x) = 0,1 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 1.000$
- In Deutschland gilt die **Preis-Absatz-Funktion** $p_1 = 100 - x_1$ und in Italien $p_2 = 48 - x_2$.
- Um den Gewinn zu maximieren, wird das Unternehmen das Produkt in beiden Ländern zu unterschiedlichen Preisen anbieten (**Preisdifferenzierung**) und somit auch unterschiedliche Mengen anbieten.
- Wie lautet die **Gewinnfunktion**?

7.4.1 Beispiel Preisdifferenzierung

➤ Umsatz in Deutschland:

$$U_1 = p_1 \cdot x_1 = (100 - x_1) \cdot x_1$$

➤ Umsatz in Italien:

$$U_2 = p_2 \cdot x_2 = (48 - x_2) \cdot x_2$$

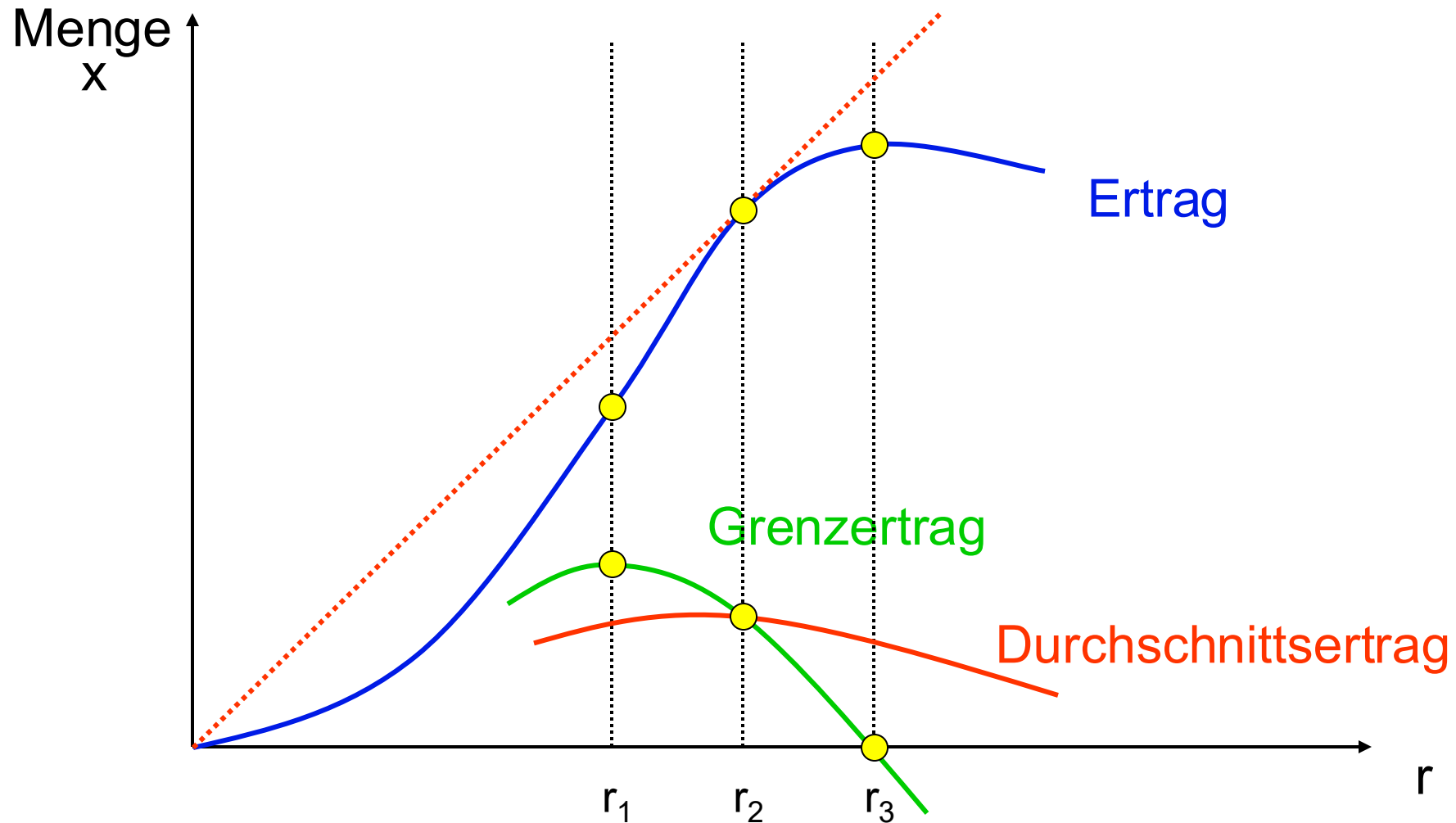
➤ Kostenfunktion:

$$K(x_1, x_2) = 0,1 \cdot (x_1 + x_2)^2 - 10 \cdot (x_1 + x_2) + 1.000$$

➤ Gewinnfunktion:

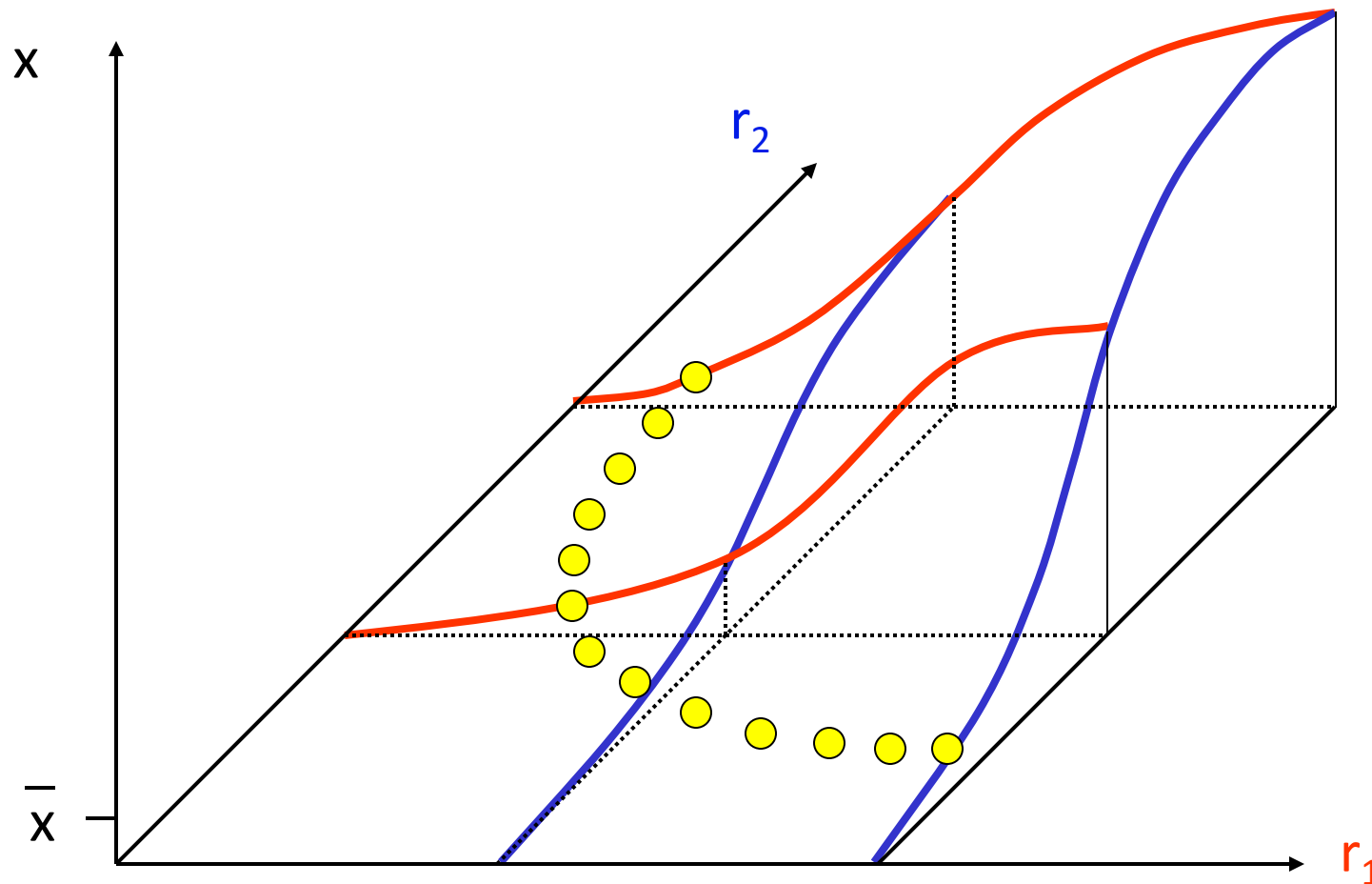
$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= U_1(x_1) + U_2(x_2) - K(x_1, x_2) \\ &= -1,1 \cdot x_1^2 - 1,1 \cdot x_2^2 + 110 \cdot x_1 + 58 \cdot x_2 - 0,2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 1.000 \end{aligned}$$

7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Das Ertragsgesetz



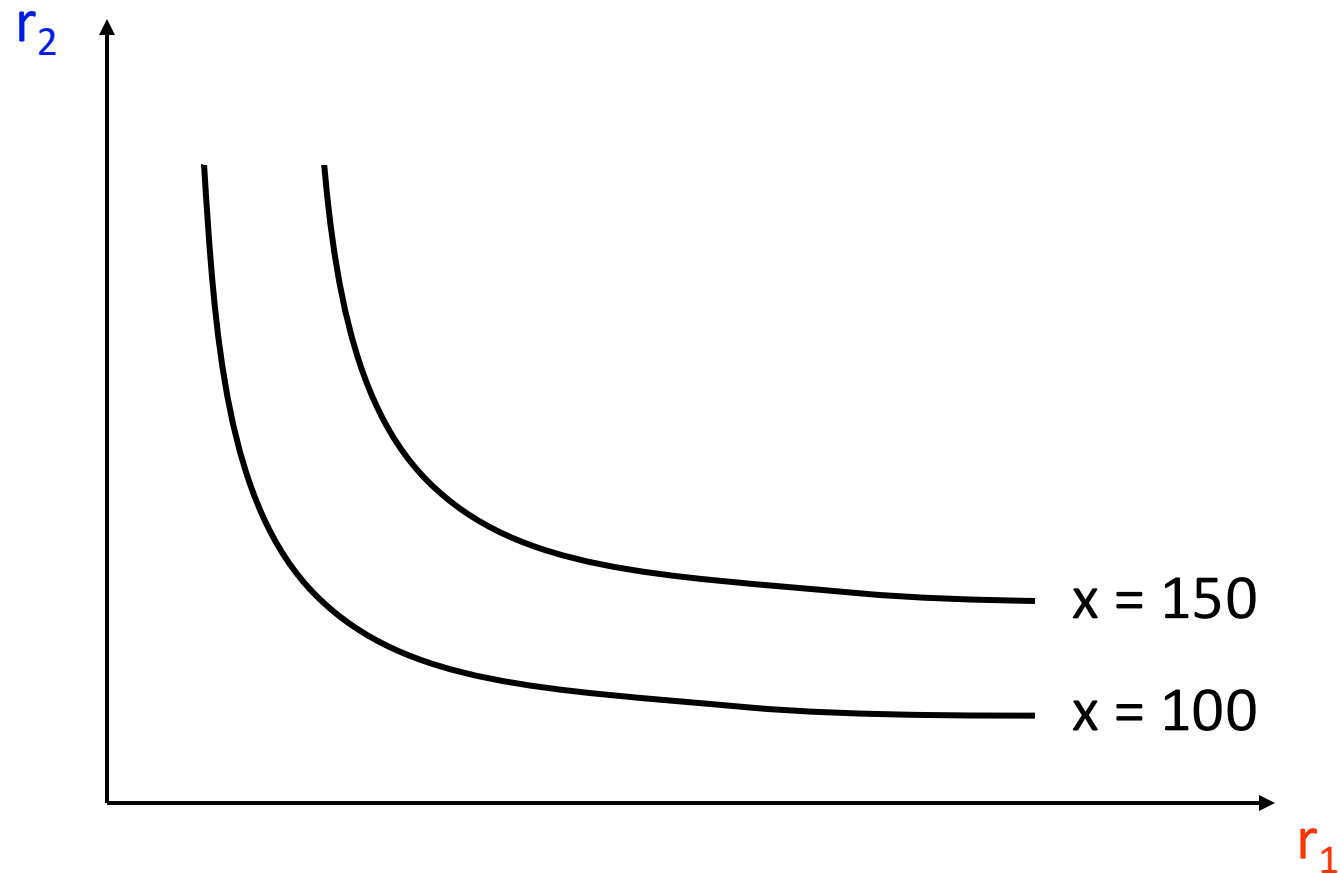
7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Das Ertragsgesetz

➤ Das Ertragsgebirge:



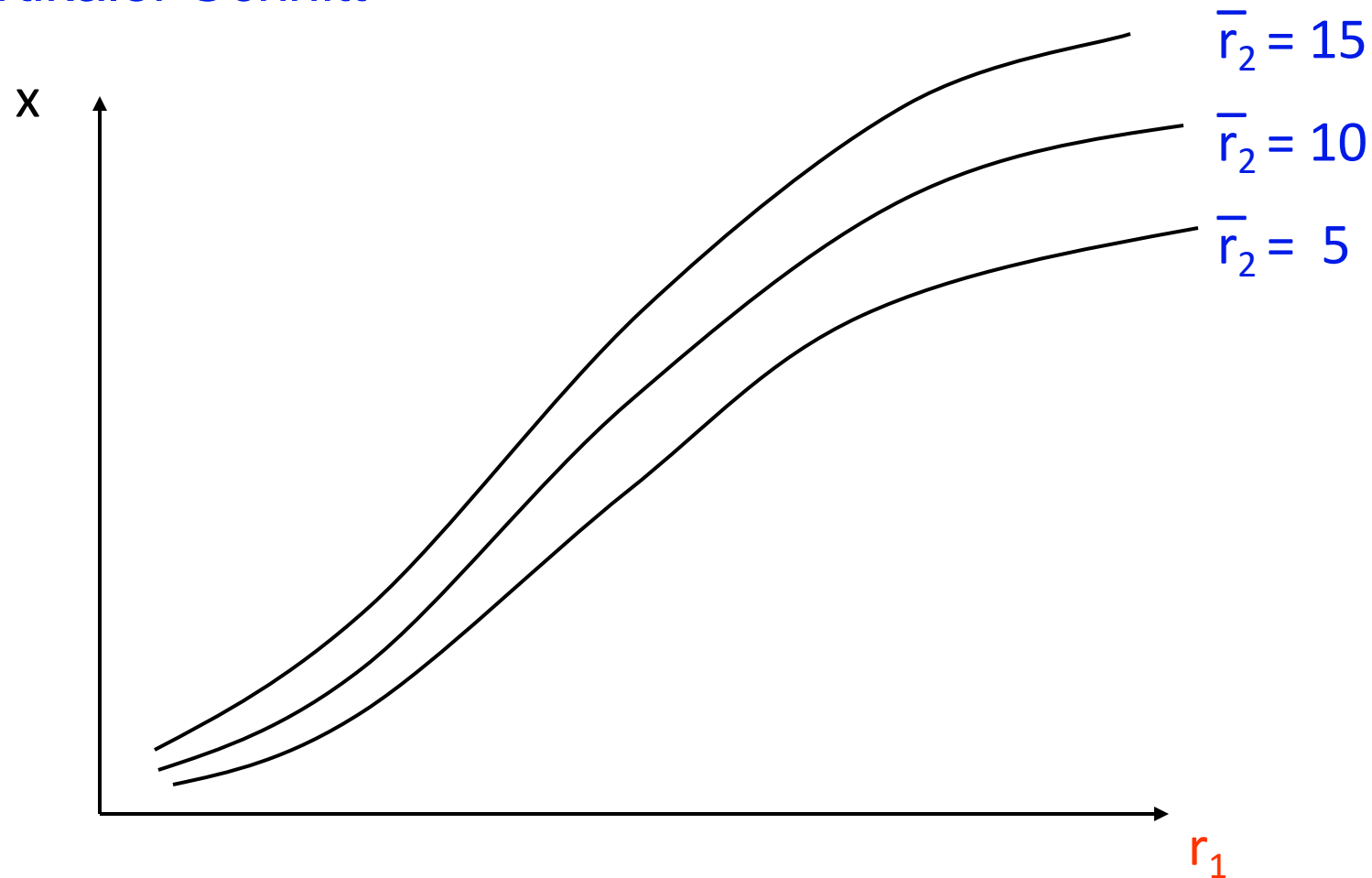
7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Das Ertragsgesetz

- Horizontaler Schnitt: Höhenlinien oder Isoquanten



7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Das Ertragsgesetz

➤ Vertikaler Schnitt



7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

➤ Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

⇒ Zwei Produktionsfaktoren:

$$x = f(r_1, r_2) = a \cdot r_1^\alpha \cdot r_2^{1-\alpha} \quad \begin{array}{c} \text{z.B.} \\ \downarrow \\ = 2 \cdot r_1^{0,5} \cdot r_2^{0,5} \end{array}$$

⇒ n Produktionsfaktoren:

$$x = f(r_1, r_2, \dots, r_n) = a \cdot r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2} \cdot r_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot r_n^{\alpha_n}$$

$$\text{mit } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 1$$

7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

➤ Horizontaler Schnitt parallel zur r_1 - und r_2 -Ebene:

⇒ Eine gegebene Produktionsmenge muss mit mehreren Faktoreinsatzmengen-Kombinationen erzielbar sein

$$x = f(r_1, r_2) = 2 \cdot r_1^{0,5} \cdot r_2^{0,5} = 16$$

$$\Leftrightarrow r_1 = \left(\frac{16}{2 \cdot r_2^{0,5}} \right)^2 = \frac{64}{r_2} \quad \text{bzw.} \quad r_2 = \left(\frac{16}{2 \cdot r_1^{0,5}} \right)^2 = \frac{64}{r_1}$$

7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

➤ Grenzrate der Substitution

(Substitutionsrate, Austauschverhältnis):

= die Faktormengen, die notwendig sind, um bei konstanter Ausbringung x eine infinitesimal kleine Einheit eines Faktors (z.B. r_1) durch einen anderen Faktor (z.B. r_2) zu ersetzen

= die Steigung der Isoquante in einem Punkt

$$\frac{dr_1}{dr_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dr_2}{dr_1}$$

Im Beispiel:

$$r_1 = \frac{64}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr_1}{dr_2} = \frac{-64}{r_2^2}$$

7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

➤ Vertikaler Schnitt:

⇒ Die Einsatzmenge eines Faktors wird konstant gesetzt.
Analysiert wird die Beziehung zwischen Output x und der Einsatzmenge des variablen Faktors r_i

$$f(r_1, \bar{r}_2) = 2 \cdot r_1^{0,5} \cdot \bar{r}_2^{0,5} = x$$

$$\Rightarrow x = 2 \cdot r_1^{0,5} \cdot 2 = 4 \cdot r_1^{0,5} \quad \text{für } \bar{r}_2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \cdot r_1^{0,5} \cdot 3 = 6 \cdot r_1^{0,5} \quad \text{für } \bar{r}_2 = 9 \quad \text{usw.}$$

7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

➤ Grenzproduktivität

= gibt die marginale Veränderung der Ausbringungsmenge an einer bestimmten Stelle der Ertragsfunktion an aufgrund einer infinitesimal kleinen Veränderung der Einsatzmenge eines Faktors bei Konstanz des anderen Faktors

$$\frac{dx}{dr_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dr_2}$$

Im Beispiel:

$$x = 2 \cdot \bar{r}_1^{0,5} \cdot \bar{r}_2^{0,5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dr_1} = 2 \cdot \bar{r}_2^{0,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \bar{r}_1^{-0,5} = \frac{\bar{r}_2^{0,5}}{\bar{r}_1^{0,5}}$$

$$x = 2 \cdot \bar{r}_1^{0,5} \cdot \bar{r}_2^{0,5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dr_2} = 2 \cdot \bar{r}_1^{0,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \bar{r}_2^{-0,5} = \frac{\bar{r}_1^{0,5}}{\bar{r}_2^{0,5}}$$

7.4.2 Beispiel Produktionsfunktion: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

- Zusammenhang zwischen Grenzrate der Substitution und Grenzproduktivität über totales Grenzprodukt (totales Differential)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot dr_1 + \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot dr_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dr_1}{dr_2} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial r_2}}{\frac{\partial x}{\partial r_1}}$$

7.5 Optimierungstheorie

7.5 Optimierungstheorie

7.5.1 Einführendes Beispiel

7.5.2 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen **ohne Nebenbedingungen**

7.5.3 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen **mit Nebenbedingungen in Gleichungsform**

7.5.3.1 Erweiterung des Beispiels

7.5.3.2 Methode der **Variablensubstitution**

7.5.3.3 Multiplikatormethode von **Lagrange**

7.5 Optimierungstheorie

Optimierungsrechnung

Zielfunktion $\rightarrow$ max!
 $\rightarrow$ min!

Zielfunktion $\rightarrow$ max!
 $\rightarrow$ min!

+ Nebenbedingung

Variablensubstitution

$f'(x) = 0$ bzw. $\text{grad } f = 0$
 $\Rightarrow$ stationäre Punkte

 $f''(x) \neq 0$ bzw. $H(x)$

Multiplikatormethode
von **LAGRANGE**

7.5.1 Einführendes Beispiel: Jogging-Schuhe

- Der **Absatz** a [in Mio. Stück] hochwertiger Jogging-Schuhe der Firma Hirschbock ist sowohl von den **Werbeausgaben** w [in Mio €], als auch von Ausgaben für das **Sponsoring** s [in Mio €] erfolgreicher Athleten abhängig:

$$a = f(s, w) = -2,5 \cdot s^2 + 16 \cdot s - 2 \cdot w^2 + 2 \cdot s \cdot w + 30$$

- Bestimmen Sie die Werte s und w , die zu einem maximalen Absatz der Jogging-Schuhe führen!
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der hinreichenden Bedingung für Extremwerte!
- Wie viele Jogging-Schuhe werden dabei abgesetzt?

7.5.2 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen

1. Schritt: Bestimmen des stationären Punktes
(Notwendige Bedingung)
 - Bilde die partiellen Ableitungen erster Ordnung (Gradient) und setze diese gleich null!
 - Löse das so entstandene Gleichungssystem!
2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung
 - Bilde die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung (Hessesche Matrix)!
 - Bilde die Folge der Hauptminoren der Hesseschen Matrix!
 - Überprüfe anschließend anhand der nachfolgenden Kriterien, ob ein Maximum, ein Minimum oder überhaupt kein Extremum vorliegt!

7.5.2 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen

- Überprüfen der hinreichenden Bedingung:
Folge der Hauptminoren bilden!

- (1) $D_i > 0$ für alle $i \Rightarrow$ relatives Minimum
- (2) $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$... $\Rightarrow$ relatives Maximum
(alternierende Vorzeichen)
- (3) $D_i = 0$ für ein $i \Rightarrow$ keine Aussage möglich
- (4) sonst. $\Rightarrow$ kein Extremwert

Hauptminoren:

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11} \quad a_{12}}^{D_1} \quad \overbrace{a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}}^{D_2} \\ \overbrace{a_{21} \quad a_{22}}^{D_1} \quad \dots \quad a_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.5.2 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen

1. Schritt: Bestimmung des stationären Punktes

$$a = f(s, w) = -2,5 \cdot s^2 + 16 \cdot s - 2 \cdot w^2 + 2 \cdot s \cdot w + 30$$

Partielle Ableitungen erster Ordnung gleich null setzen:

$$\text{I.: } f_s = -5 \cdot s + 16 + 2 \cdot w \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{II.: } f_w = -4 \cdot w + 2 \cdot s \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad s = 2 \cdot w$$

$$\text{II. in I.: } -10 \cdot w + 16 + 2 \cdot w = 0$$

$$\Rightarrow w_{\text{opt}} = 2 \quad \text{und} \quad s_{\text{opt}} = 4$$

$$\Rightarrow a = 62$$

7.5.2 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen

2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingungen

$$f_s = -5 \cdot s + 16 + 2 \cdot w \quad \text{bzw.} \quad f_w = -4 \cdot w + 2 \cdot s$$

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung (Hessesche Matrix) und Folge von Hauptminoren bilden:

$$\left. \begin{array}{l} f_{ss} = -5 \\ f_{sw} = 2 \\ f_{ws} = 2 \\ f_{ww} = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow H(s_{\text{opt}}=4, w_{\text{opt}}=2) = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|} \hline D_1 \\ \hline \end{array} & D_2 \\ \left[\begin{array}{cc} -5 & 2 \\ 2 & -4 \end{array} \right] \end{array}$$

$$D_1 = -5 < 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = (-5) \cdot (-4) - 2 \cdot 2 = 16 > 0$$

$\Rightarrow$ **relatives Maximum** bei $s_{\text{opt}} = 4$ und $w_{\text{opt}} = 2$

7.5.3 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen mit Nebenbedingungen

7.5.3.1 Erweiterung des Beispiels

7.5.3.2 Methode der Variablensubstitution

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

7.5.3.1 Erweiterung des Beispiels

- Der **Absatz a** [in Mio. Stück] hochwertiger Jogging-Schuhe der Firma Hirschbock ist sowohl von den **Werbeausgaben w** [in Mio €], als auch von **Ausgaben für das Sponsoring s** [in Mio €] erfolgreicher Athleten abhängig:

$$a = f(s, w) = -2,5 \cdot s^2 + 16 \cdot s - 2 \cdot w^2 + 2 \cdot s \cdot w + 30$$

- Die aktuelle **Finanzplanung** hat ergeben, dass für Werbung und Sponsoring nur insgesamt **4,7 Mio €** zur Verfügung stehen.
- Formulieren Sie die Nebenbedingung in Form einer linearen Gleichung!
- Bestimmen Sie die absatzmaximalen Werte für s und w unter Berücksichtigung der Nebenbedingung!
- Wie viele Jogging-Schuhe werden jetzt abgesetzt?

7.5.3.2 Methode der Variablensubstitution

1. Schritt: Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen
2. Schritt: Aufstellen der reduzierten Zielfunktion durch Substitution der einen Variablen durch die andere (unter Zuhilfenahme des Schrittes 1)
3. Schritt: Bestimmen des stationären Punktes (Notwendige Bedingung)
4. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung

7.5.3.2 Methode der Variablensubstitution

1. Schritt: Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen

$$s + w = 4,7$$

$$w = 4,7 - s$$

2. Schritt: Aufstellen der reduzierten Zielfunktion

$$\begin{aligned} f(s) &= -2,5 \cdot s^2 + 16 \cdot s - 2 \cdot (4,7 - s)^2 + 2 \cdot s \cdot (4,7 - s) + 30 \\ &= -6,5 \cdot s^2 + 44,2 \cdot s - 14,18 \end{aligned}$$

7.5.3.2 Methode der Variablensubstitution

3. Schritt: Bestimmung des stationären Punktes

$$f(s) = -6,5 \cdot s^2 + 44,2 \cdot s - 14,18$$

Ableitung erster Ordnung gleich null setzen:

$$\begin{aligned} f'(s) = -13 \cdot s + 44,2 &\stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad s_{\text{opt}} = 3,4 \\ &\Rightarrow \quad w_{\text{opt}} = 4,7 - 3,4 = 1,3 \end{aligned}$$

$$a = f(s_{\text{opt}} = 3,4) = -6,5 \cdot 3,4^2 + 44,2 \cdot 3,4 - 14,18 = 60,96$$

4. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung

$$f''(s) = -13 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Maximum}$$

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

1. Schritt: Aufstellen der Lagrange-Funktion für $n = 2$ Variablen und $m = 1$ Nebenbedingungen
 - Löse die Nebenbedingung nach null auf.
 - Multipliziere die so entstandene Nebenbedingung mit λ und hänge den Ausdruck an die ursprüngliche Zielfunktion.
 - λ bezeichnet man als Lagrange-Multiplikator.
2. Schritt: Bestimmen des stationären Punktes
(Notwendige Bedingung)
3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung
(Bilde dazu die letzten $n - m = 2 - 1 = 1$ Hauptminoren)

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

- Überprüfen der hinreichenden Bedingung:
Bilde die letzten $n - m = 1$ Hauptminoren!
 - ⇒ Hat der Hauptminor D_3 ein negatives Vorzeichen,
so existiert ein relatives Minimum.
 - ⇒ Hat der Hauptminor D_3 ein positives Vorzeichen,
so existiert ein relatives Maximum.
 - ⇒ Ist der Hauptminor D_3 gleich null,
so ist keine Aussage möglich.

(Diese Aussagen gelten nur für $n = 2$ Variablen
und $m = 1$ Nebenbedingung!)

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

- Überprüfen der hinreichenden Bedingung (allgemeingültiger Exkurs): Bilde die letzten $n - m$ Hauptminoren!
 - ⇒ Haben sämtliche Hauptminoren $D_{2 \cdot m+1}, D_{2 \cdot m+2}, \dots, D_{m+n}$ das Vorzeichen $\text{sgn}(-1)^m$, so existiert ein **relatives Minimum**.
 - ⇒ Haben sämtliche Hauptminoren $D_{2 \cdot m+1}, D_{2 \cdot m+2}, \dots, D_{m+n}$, beginnend mit $\text{sgn} D_{2 \cdot m+1} = \text{sgn}(-1)^{m+1}$, alternierende Vorzeichen, so hat die Funktion ein **relatives Maximum**.
 - ⇒ Ist wenigstens eine der oben genannten Bedingungen dadurch verletzt, dass der betreffende Hauptminor genau das Vorzeichen anderer Art besitzt, so liegt **kein relatives Extremum** vor.
 - ⇒ Ist einer der Hauptminoren gleich null, so ist **keine Entscheidung** möglich.

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

1. Schritt: Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$L(s, w, \lambda) = -2,5 \cdot s^2 + 16 \cdot s - 2 \cdot w^2 + 2 \cdot s \cdot w + 30 \\ + \lambda \cdot (4,7 - s - w)$$

2. Schritt: Bestimmung des stationären Punktes

$$L_s = -5 \cdot s + 16 + 2 \cdot w - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = -5 \cdot s + 16 + 2 \cdot w$$

$$L_w = -4 \cdot w + 2 \cdot s - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = -4 \cdot w + 2 \cdot s$$

$$L_\lambda = 4,7 - s - w \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Nebenbedingung})$$

$$\Rightarrow w_{\text{opt}} = 1,3 ; s_{\text{opt}} = 3,4 ; \lambda = 1,6 \quad \Rightarrow a = L = 60,96$$

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung

Partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$L_s = -5 \cdot s + 16 + 2 \cdot w - \lambda$$

$$L_w = -4 \cdot w + 2 \cdot s - \lambda$$

$$L_\lambda = 4,7 - s - w$$

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$L_{ss} = -5 \quad L_{sw} = 2 \quad L_{s\lambda} = -1$$

$$L_{ws} = 2 \quad L_{ww} = -4 \quad L_{w\lambda} = -1$$

$$L_{\lambda s} = -1 \quad L_{\lambda w} = -1 \quad L_{\lambda\lambda} = 0$$

Hessesche Matrix:

$$H(s, w, \lambda) = \begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} \text{2. Abl.} \\ \hline \text{1. Abl.} \end{array} & \begin{array}{c} s \\ w \\ \lambda \end{array} & \begin{array}{c} w \\ \lambda \end{array} & \begin{array}{c} \lambda \end{array} \\ \begin{array}{c} s \\ w \\ \lambda \end{array} & \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung (II)

Den letzten Hauptminor D_3 bilden:

$$\det \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -5 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -5 \cdot (0 - 1) - 2 \cdot (0 - 1) - 1 \cdot (-2 - 4)$$

$$= 13 > 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum}$$

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

➤ Ökonomische Interpretation des Lagrange-Multiplikators λ

- ⇒ λ ist eine **Opportunitätsgröße**
- ⇒ Eine Erhöhung der **Restriktionsgröße** (hier das Werbe- und Sponsoring-Budget) zieht eine Erhöhung der **Zielgröße** (hier der Absatz an Jogging-Schuhen) um das λ -fache nach sich.
- ⇒ **Konkret:**
 - λ hat im Beispiel die Dimension [Mio Stück/Mio €] bzw. [Stück/€]. Wird das Budget um 1 € erhöht, so erhöht sich der Absatz an Jogging-Schuhen um 1,6 Stück.

Das war's!

**Viel Erfolg
bei der Klausur!**

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615