



Bachelor Betriebswirtschaft

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Michael Bucker

Prof. Dr. Michael Bucker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte
- 4 Funktionen
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
- 6 Integralrechnung**
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen



Kapitel 6:

Integralrechnung

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

6 Integralrechnung

6.1 Einführendes Beispiel

6.2 Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

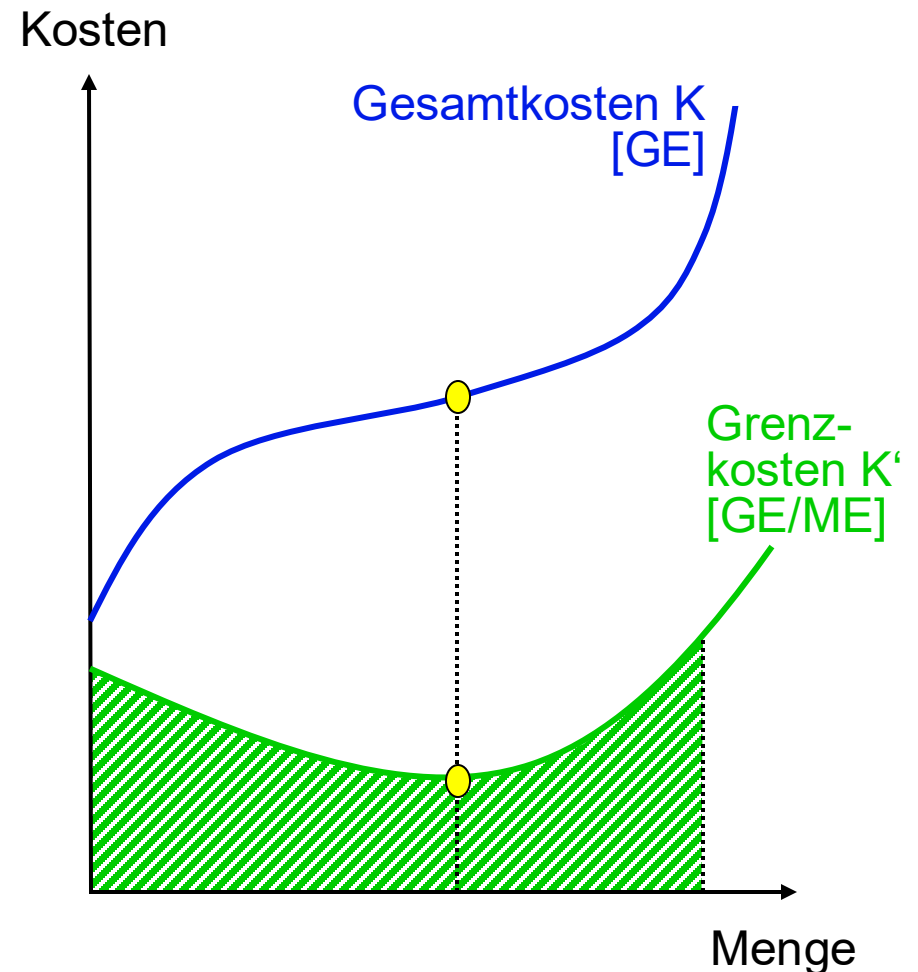
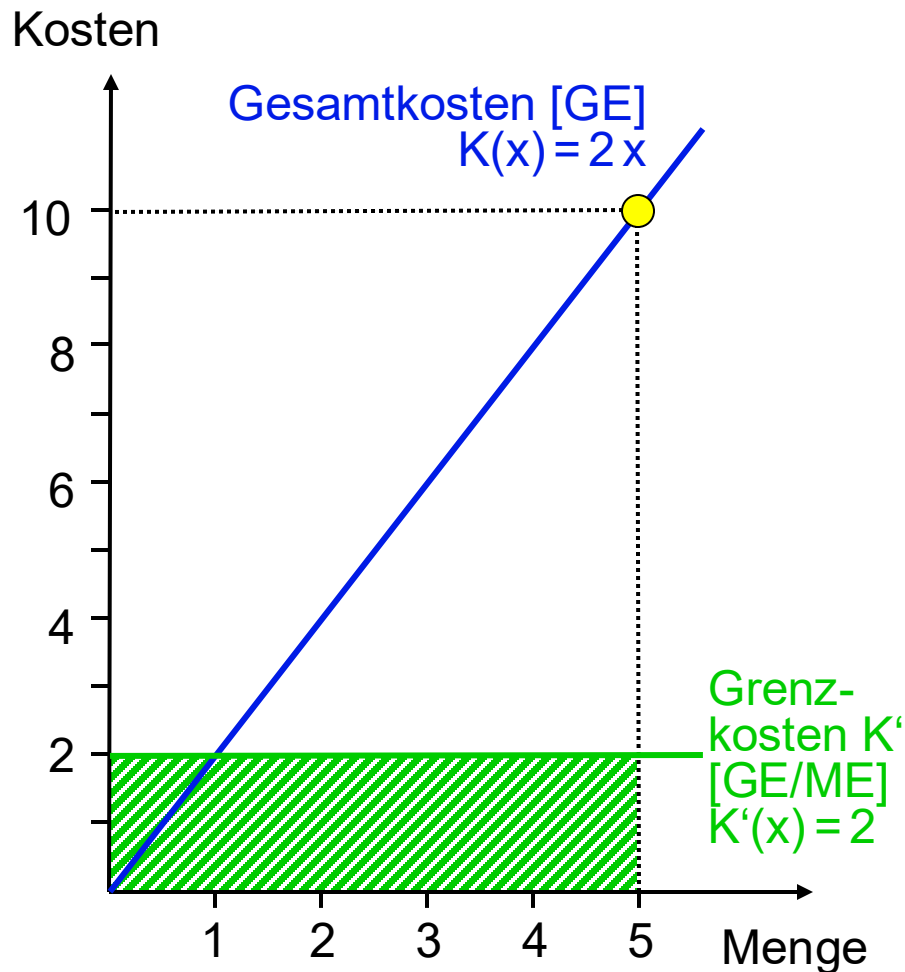
6.3 Unbestimmtes Integral

6.4 Bestimmtes Integral

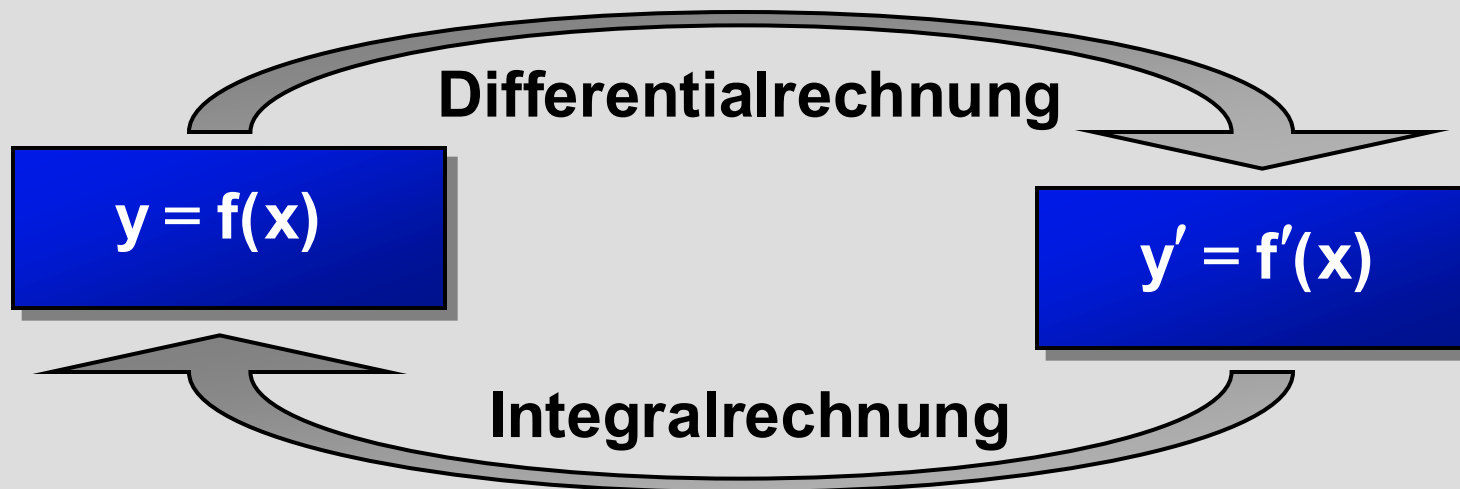
6.5 Bestimmung von Flächeninhalten mit Hilfe des bestimmten Integrals

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)

6.1 Einführendes Beispiel: Rückschluss von den Grenzkosten auf die (variablen) Gesamtkosten



6.2 Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung



Gliederung

6 Integralrechnung

6.1 Einführendes Beispiel

6.2 Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

6.3 Unbestimmtes Integral

6.3.1 Der Begriff der Stammfunktion und des unbestimmten Integrals

6.3.2 Grundintegrale

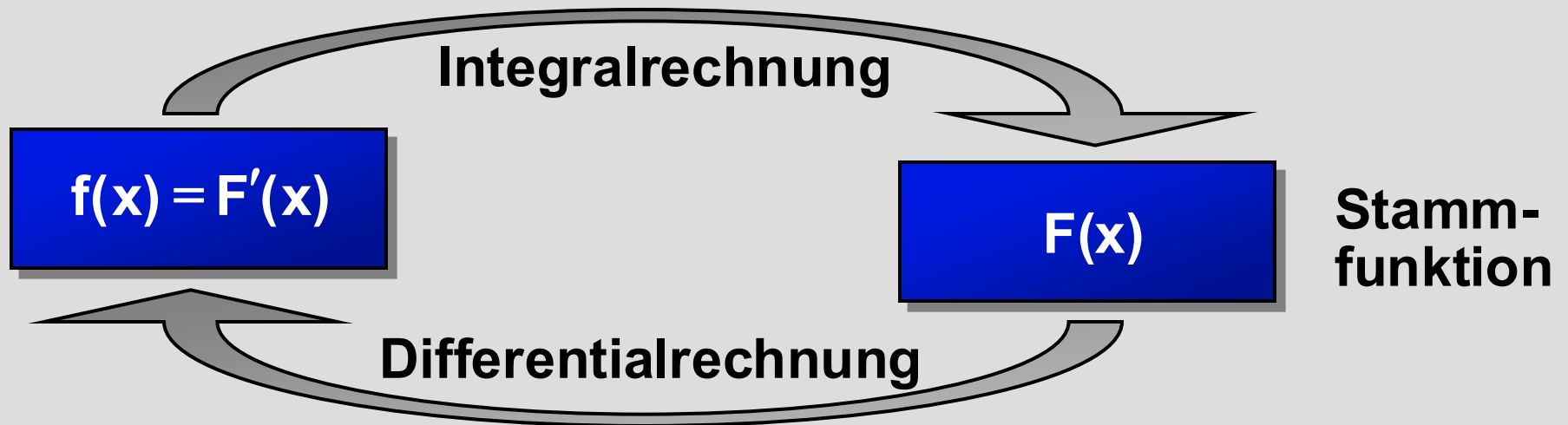
6.3.3 Integrationsregeln

6.4 Bestimmtes Integral

6.5 Bestimmung von Flächeninhalten

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung

6.3.1 Der Begriff der Stammfunktion und des unbestimmten Integrals



Beispiel:

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 15$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 76$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2$$

6.3.1 Der Begriff der Stammfunktion und des unbestimmten Integrals

- F und f seien zwei Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich ID . F sei differenzierbar, und es gelte:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in ID$$

Dann nennt man F eine **Stammfunktion** von f .

- Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt **unbestimmtes Integral** und wird mit $\int f(x) dx$ bezeichnet.

Es gilt also:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

mit $f(x)$ als Integrand, x als Integrationsvariable und C als Integrationskonstante

6.3.2 Grundintegrale

Funktion	Stammfunktion
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \cdot \ln x - x + C$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Linearität:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

➤ Partielle Integration:

$$\int (g' \cdot f) dx = f \cdot g - \int (f' \cdot g) dx$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Substitutionsregel (Teil 1):

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$$

$$\text{mit } z = g(x); \quad \frac{dz}{dx} = g'(x) \quad \text{bzw.} \quad dz = g'(x) dx$$

➤ Substitutionsregel (Teil 2):

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(z)) \cdot g'(z) dz$$

$$\text{mit } x = g(z); \quad \frac{dx}{dz} = g'(z) \quad \text{bzw.} \quad dx = g'(z) dz$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Erstes Beispiel Substitutionsregel:

$$\int (2x^2 + 1)^2 \cdot 4x \cdot dx$$

$$= \int z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} (2x^2 + 1)^3 + C$$

$$\text{mit } z = 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4x$$

$$\Leftrightarrow dz = 4x \cdot dx$$

oder

$$dx = \frac{dz}{4x}$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Erstes Beispiel Substitutionsregel, leicht variiert:

Substitutionsregel I:

$$\int (2x^2 + 1)^2 \cdot 5x \cdot dx$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \int (2x^2 + 1)^2 \cdot 4x \cdot dx$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \int z^2 dz = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} z^3 + C$$

$$= \frac{5}{12} (2x^2 + 1)^3 + C$$

Substitutionsregel II (Alternative):

$$\int (2x^2 + 1)^2 \cdot 5x \cdot dx$$

$$= \int z^2 \cdot 5x \cdot \frac{dz}{4x}$$

$$= \int z^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot dz = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} z^3 + C$$

$$= \frac{5}{12} (2x^2 + 1)^3 + C$$

Nebenrechnung:

$$\text{mit } z = 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4x$$

$$\Leftrightarrow dz = 4x \cdot dx$$

oder

$$dx = \frac{dz}{4x}$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Zweites Beispiel Substitutionsregel:

Substitutionsregel I:

$$\begin{aligned}
 & \int \ln(2x + 6) \cdot dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int \ln(2x + 6) \cdot 2 \cdot dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int \ln z \, dz = \frac{1}{2} \cdot (z \cdot \ln z - z) + C \\
 &= \frac{1}{2} \cdot z \cdot (\ln z - 1) + C \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (2x + 6) \cdot (\ln(2x + 6) - 1) + C
 \end{aligned}$$

Substitutionsregel II:

$$\begin{aligned}
 & \int \ln(2x + 6) \cdot dx \\
 &= \int \ln(z) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int \ln z \, dz = \dots
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\text{mit } z = 2x + 6$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2$$

$$\Leftrightarrow dz = 2 \cdot dx$$

oder

$$dx = \frac{1}{2} dz$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Weitere Beispiele zu den Integrationsregeln:

■ Linearität:

$$\int (2 \cdot x^3 + 5 \cdot x) dx = 2 \cdot \int x^3 dx + 5 \cdot \int x dx = \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{5}{2} \cdot x^2 + C$$

■ Partielle Integration:

$$\int (2x \cdot \ln x) dx = x^2 \cdot \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + C$$

mit $g'(x) = 2x$ und $f(x) = \ln x$

■ Substitutionsregel:

$$\int_a^b (2x^2 + 1)^2 \cdot 4x dx = \int_{2a^2+1}^{2b^2+1} z^2 dz = \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{2a^2+1}^{2b^2+1} = \frac{1}{3} (2b^2 + 1)^3 - \frac{1}{3} (2a^2 + 1)^3$$

$$\text{mit } z = (2x^2 + 1); \quad \frac{dz}{dx} = 4x \Leftrightarrow dz = 4x dx$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Beispiel für eine Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{-2}{x-1} \right) dx$$

siehe **Nebenrechnung** auf
den nachfolgenden Seiten

$$= \int \frac{3}{x+2} dx - \int \frac{2}{x-1} dx$$

$$= 3 \cdot \ln|x+2| - 2 \cdot \ln|x-1| + C$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Nebenrechnung zur Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Methode „Einsetzen
spezieller Werte“:

$$\Leftrightarrow x-7 = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+2)$$

$$\Rightarrow A = \left. \frac{x-7}{x-1} \right|_{-2} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$B = \left. \frac{x-7}{x+2} \right|_1 = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{3}{x+2} + \frac{-2}{x-1}$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Nebenrechnung zur Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Methode „Koeffizientenvergleich“:

$$\Leftrightarrow x-7 = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+2)$$

$$\Leftrightarrow x-7 = A \cdot x - A + B \cdot x + 2 \cdot B$$

$$\Rightarrow 1 = A + B$$

$$-7 = -A + 2 \cdot B$$

$$\Rightarrow A = 3 \quad \text{und} \quad B = -2$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{3}{x+2} + \frac{-2}{x-1}$$

Gliederung

6 Integralrechnung

6.1 Einführendes Beispiel

6.2 Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

6.3 Unbestimmtes Integral

6.4 Bestimmtes Integral

6.4.1 Der Begriff des bestimmten Integrals

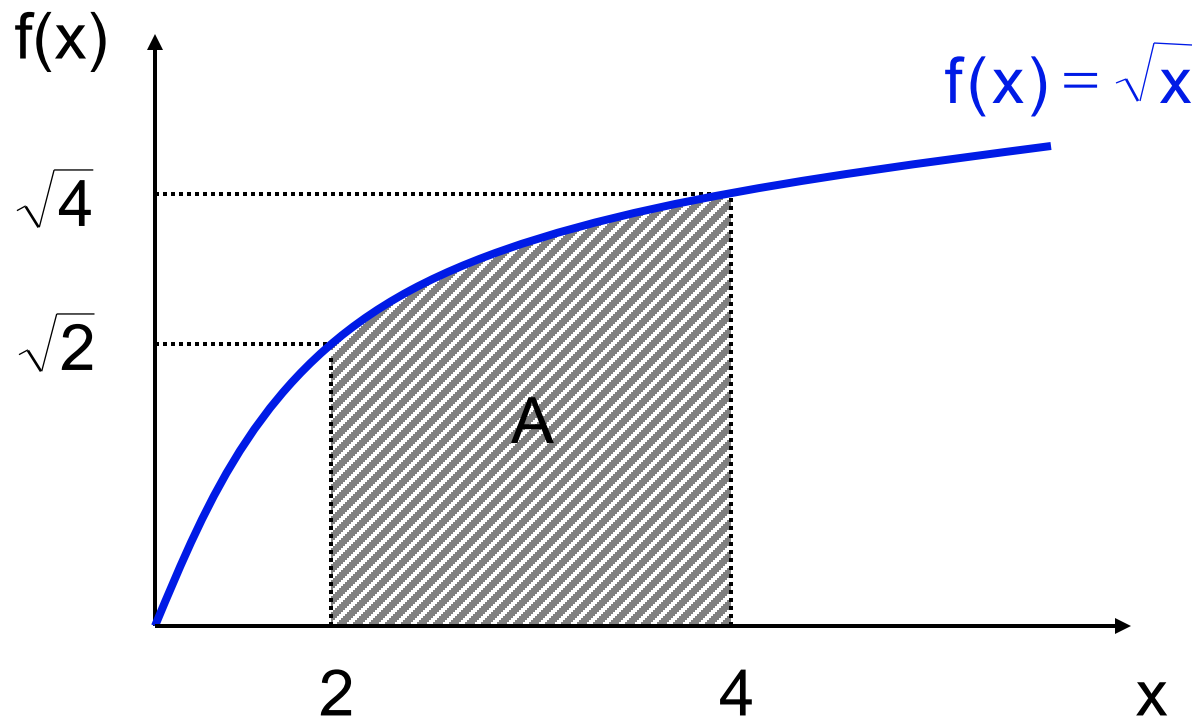
6.4.2 Rechenregeln für das bestimmte Integral

6.5 Bestimmung von Flächeninhalten

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung

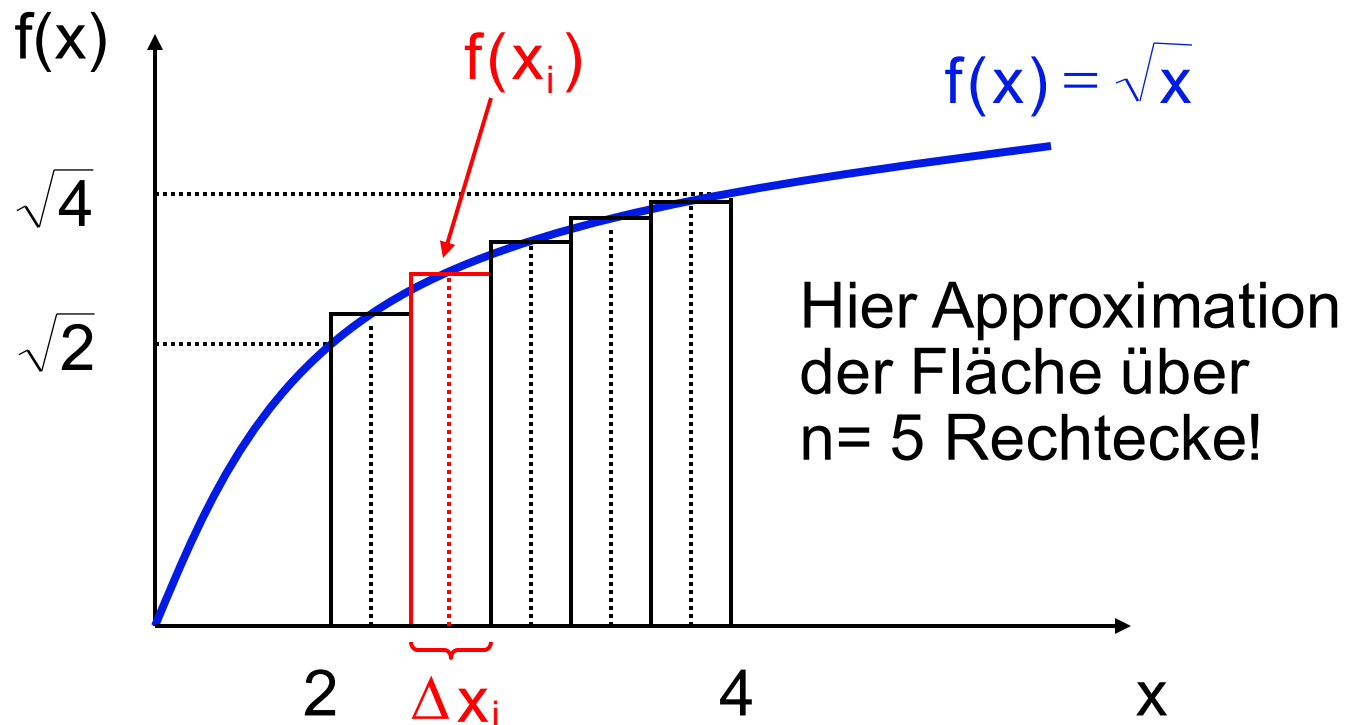
6.4.1 Der Begriff des bestimmten Integrals

➤ Flächeninhalte unter Kurven



6.4.1 Der Begriff des bestimmten Integrals

➤ Flächeninhalte unter Kurven



6.4.1 Der Begriff des bestimmten Integrals

- Für die **Fläche A** gilt somit:

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \quad (n \text{ ist die Anzahl der Rechtecke!})$$

- Ist $f(x)$ in $[a, b]$ stetig und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, so kann das **bestimmte Integral** auch wie folgt berechnet werden:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- **Beispiel:**

$$\int_2^4 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \approx 3,45$$

6.4.2 Rechenregeln für das bestimmte Integral

➤ Eigenschaften des bestimmten Integrals:

$$1. \quad \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$2. \quad \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

$$3. \quad \int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

➤ Im übrigen gelten die gleichen **Integrationsregeln** des Abschnitts 6.3.3.

Gliederung

6 Integralrechnung

6.1 Einführendes Beispiel

6.2 Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

6.3 Unbestimmtes Integral

6.4 Bestimmtes Integral

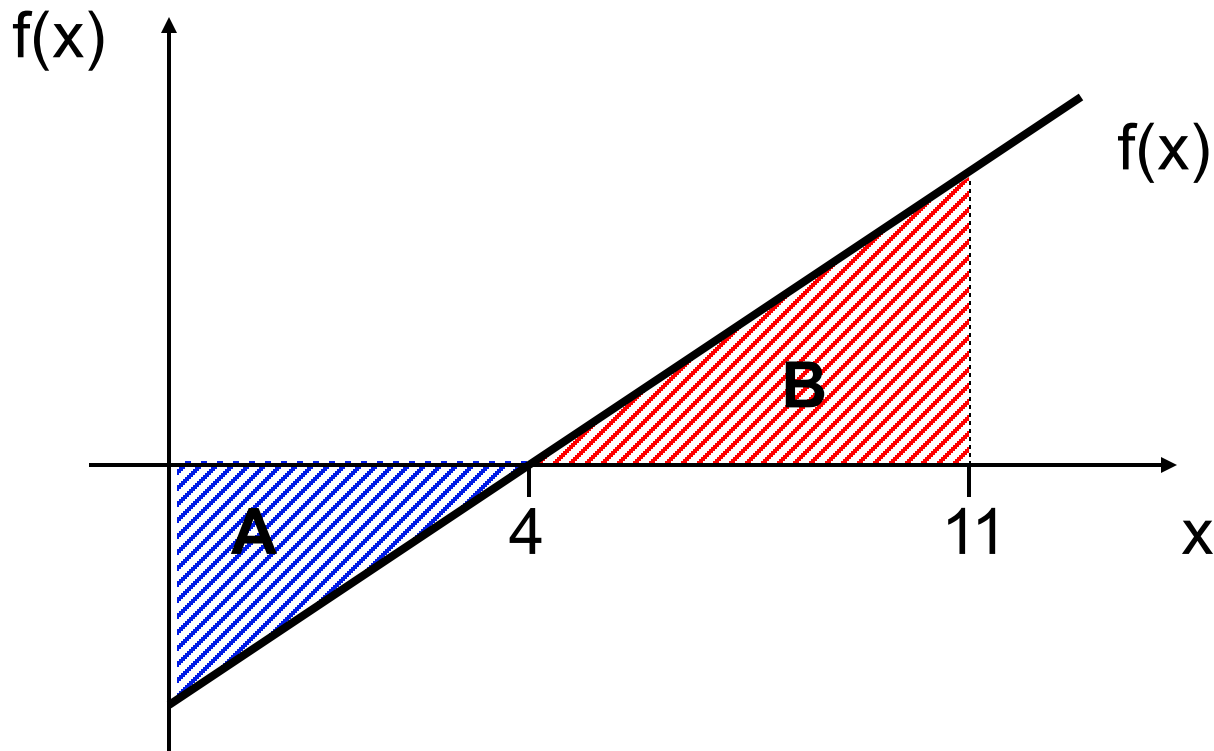
6.5 Bestimmung von Flächeninhalten mit Hilfe des bestimmten Integrals

6.5.1 Flächenbestimmung zwischen Funktion und Abszisse

6.5.2 Flächenbestimmung zwischen zwei beliebigen Funktionen

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung

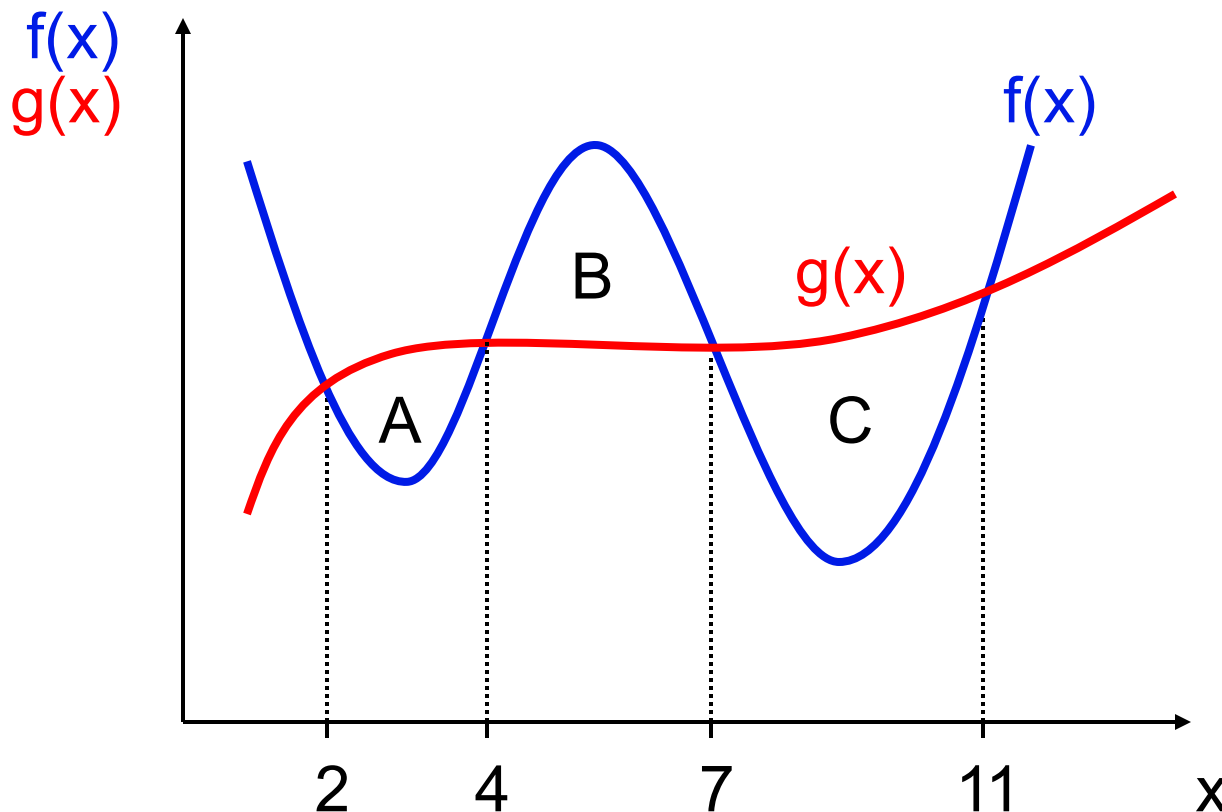
6.5.1 Flächenbestimmung zwischen Funktion und Abszisse



$$A + B =$$
$$+ \left| \int_0^4 f(x) dx \right|$$
$$+ \left| \int_4^{11} f(x) dx \right|$$

Beachte: Nicht über Nullstellen hinweg integrieren!

6.5.2 Flächenbestimmung zwischen zwei beliebigen Funktionen



$$A + B + C =$$

$$+ \left| \int_2^4 (g(x) - f(x)) dx \right|$$

$$+ \left| \int_4^7 (g(x) - f(x)) dx \right|$$

$$+ \left| \int_7^{11} (g(x) - f(x)) dx \right|$$

Beachte: Nicht über Schnittstellen hinweg integrieren!

Gliederung

6 Integralrechnung

6.1 Einführendes Beispiel

6.2 Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

6.3 Unbestimmtes Integral

6.4 Bestimmtes Integral

6.5 Bestimmung von Flächeninhalten

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung
(Produzenten- und Konsumentenrente)

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)

- Ein Monopolist möchte ein neues Produkt auf den Markt bringen. Die **Nachfragefunktion** f^{-1} nach diesem Produkt sieht wie folgt aus:

$$f^{-1} : [4; 9] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = f^{-1}(p) = 10 - p$$

$$\text{bzw.} \quad f : [1; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = f(x) = 10 - x$$

Eine Unternehmensberatung empfiehlt, den Preis p für eine Einheit auf $p_M = 4$ festzusetzen. Damit könnten genau 6 Einheiten am Markt abgesetzt werden. Der Umsatz beträgt in diesem Fall **24 Geldeinheiten** (GE).

- Später ändert die Unternehmensberatung ihre Meinung und schlägt vor, den **Preis zunächst auf 9 GE** festzusetzen und **nach und nach um jeweils 1 GE bis auf 4 GE abzusenken**.
Wie hoch ist in diesem Fall der Umsatz des Monopolisten?

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)

- Der Preis wird zunächst auf 9 GE/ME festgesetzt. Zu diesem Preis findet sich ein Käufer (Umsatz = 9 GE). Anschließend wird der Preis auf 8 GE/ME gesenkt. Zwei Käufer sind nun bereit, das Gut zu kaufen. Von diesen beiden Käufern hat einer das Produkt bereits zu einem Preis von 9 GE/ME gekauft. Es kann demnach nur eine weitere Einheit zum Preis von 8 GE/ME abgesetzt werden usw. Der **Gesamtumsatz** beträgt dann **39 GE**.

$$p=9: \quad U = p \cdot x = 9 \cdot (1-0) = 9 \quad [\text{GE}]$$

$$p=8: \quad U = p \cdot x = 8 \cdot (2-1) = 8 \quad [\text{GE}]$$

$$p=7: \quad U = p \cdot x = 7 \cdot (3-2) = 7 \text{ [GE]}$$

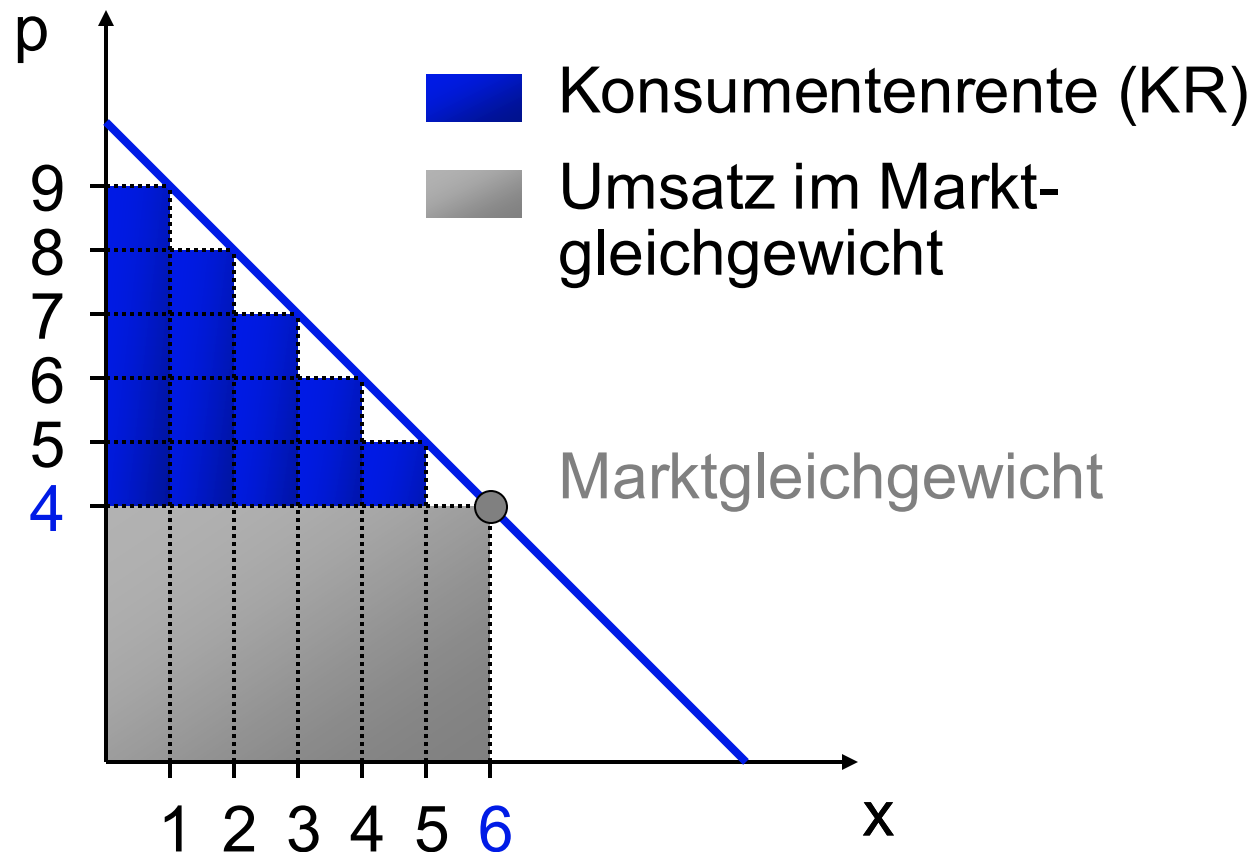
$$p = 6: \quad U = p \cdot x = 6 \cdot (4 - 3) = 6 \quad [\text{GE}]$$

$$p=5: \quad U = p \cdot x = 5 \cdot (5-4) = 5 \quad [\text{GE}]$$

$$p = 4: \quad U = p \cdot x = 4 \cdot (6 - 5) = 4 \quad [\text{GE}]$$

Summe: 39 [GE] > 24 [GE]

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)



6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)

➤ Konsumentenrente:

⇒ Verzichtet der Anbieter eines Gutes auf eine stetige Preisreduktion von der Preisobergrenze p_0 bis zum Marktpreis p_M (Marktgleichgewicht), in dem sie sofort den Marktpreis p_M festsetzen, so sparen die Käufer die so genannte Konsumentenrente:

$$KR = \int_0^{x_M} p(x) \, dx - p_M \cdot x_M$$

$$\begin{aligned} \text{hier: } KR &= \int_0^6 (10 - x) \, dx - 4 \cdot 6 = \left[10x - 0,5x^2 \right]_0^6 - 24 \\ &= 60 - 18 - 0 - 24 = 18 \end{aligned}$$

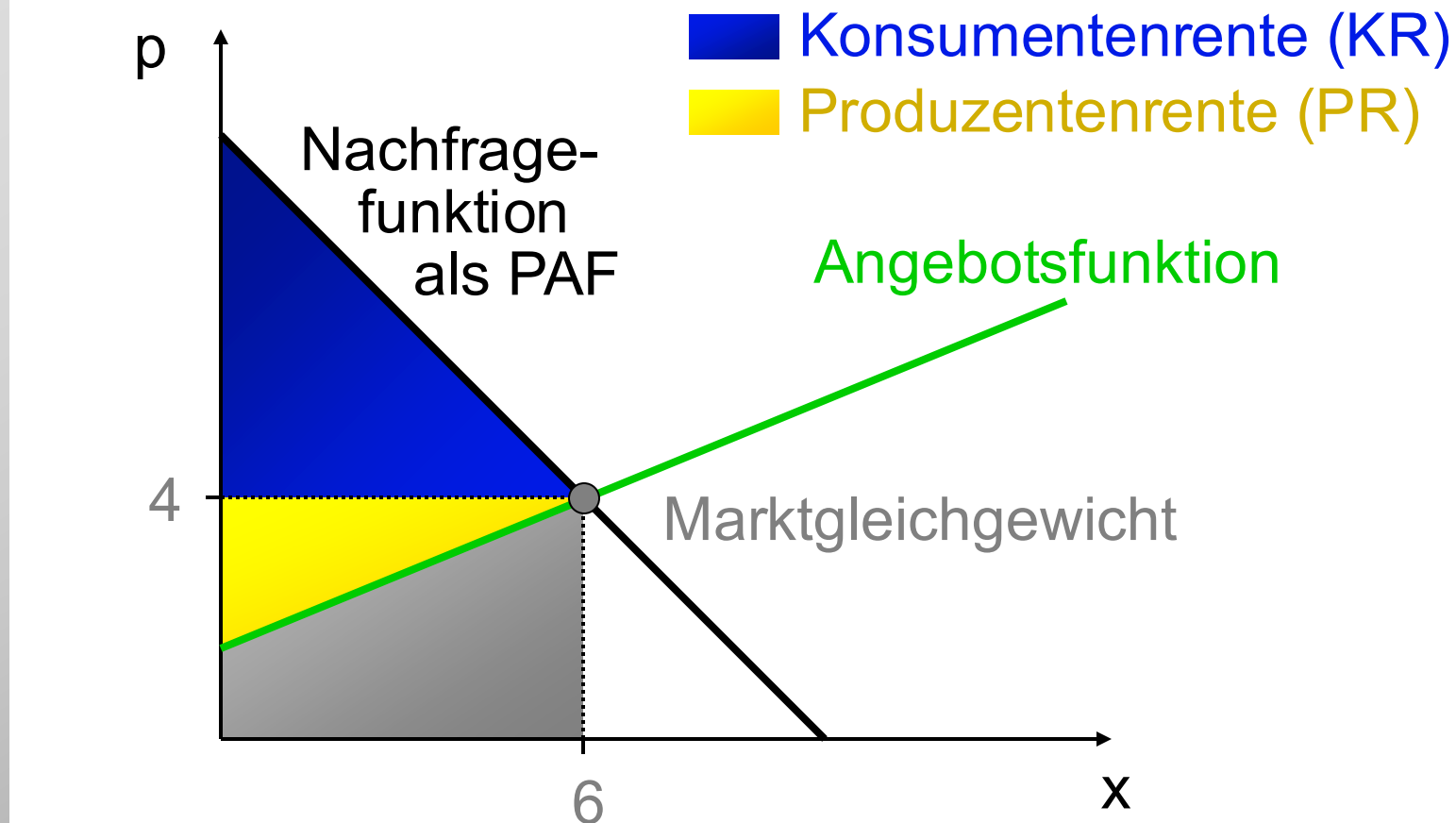
6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)

➤ Produzentenrente:

⇒ Die Produzentenrente fällt dann an, wenn ein Unternehmer ein bestimmtes Produkt zu verschiedenen Preisen entlang seiner Angebotskurve A anzubieten bereit ist, aber davon profitiert, dass der Marktpreis sich auf einer bestimmten Höhe p_M eingependelt hat (Marktgleichgewicht).

$$PR = p_M \cdot x_M - \int_0^{x_M} A \, dx$$

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)



Jetzt folgt Kapitel 7:

Differentialrechnung II

**(Funktionen mit mehreren
unabhängigen Variablen)**

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615