



Bachelor Betriebswirtschaft

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Michael Bucker

Prof. Dr. Michael Bucker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte
- 4 Funktionen
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen**
- 6 Integralrechnung
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen



Kapitel 5:

Differentialrechnung I (Funktionen mit einer unabhängigen Variablen)

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

5 Differentialrechnung I: Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

5.1 Einführendes Beispiel

5.2 Grundzüge der Differentialrechnung

5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential

5.2.2 Ableitungsregeln

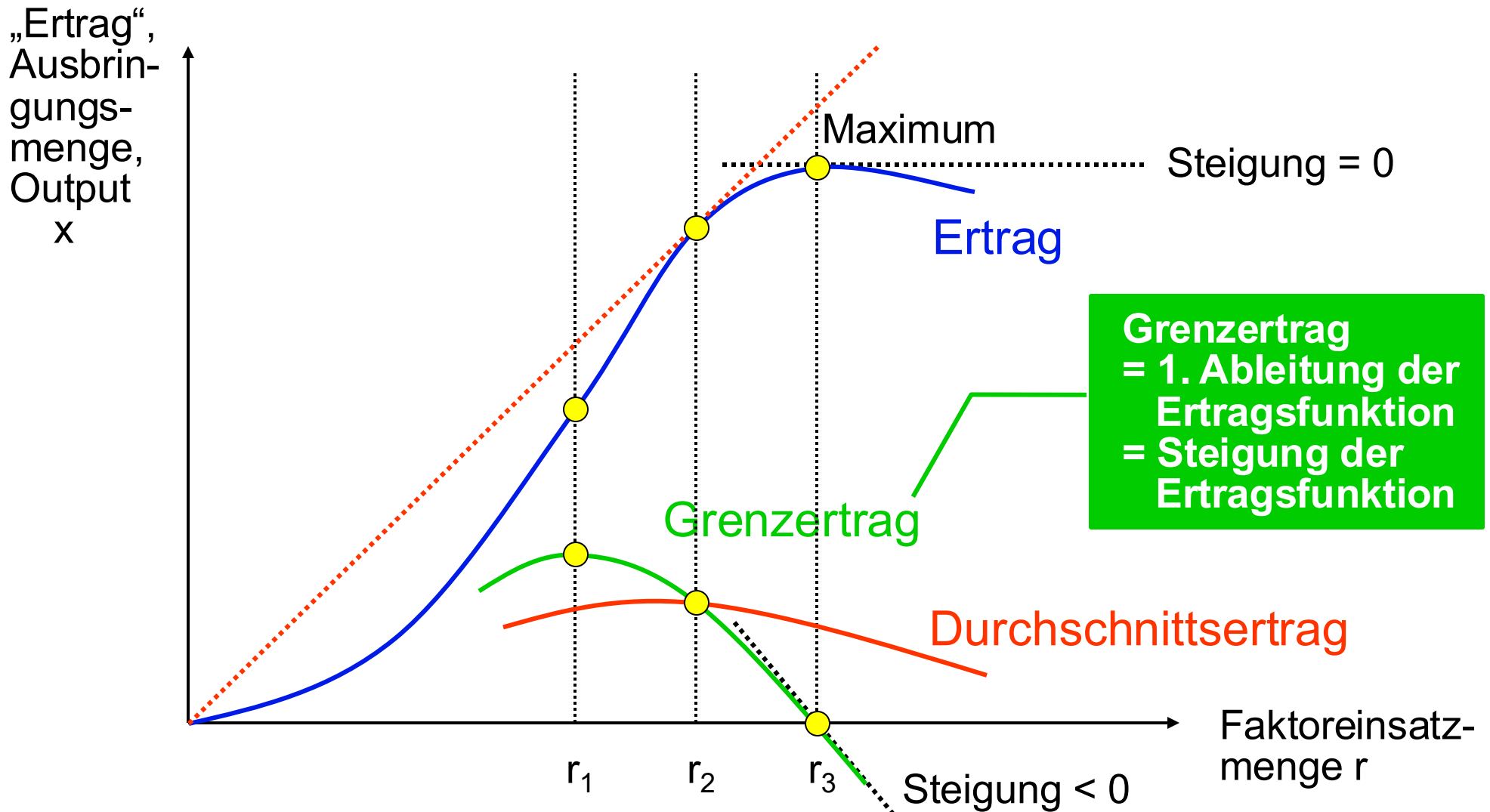
5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

5.4 Ökonomische Anwendung der Differentialrechnung

5.4.1 Bestimmung und Interpretation von Extremwerten ökonomischer Funktionen

5.4.2 Ökonomische Maße

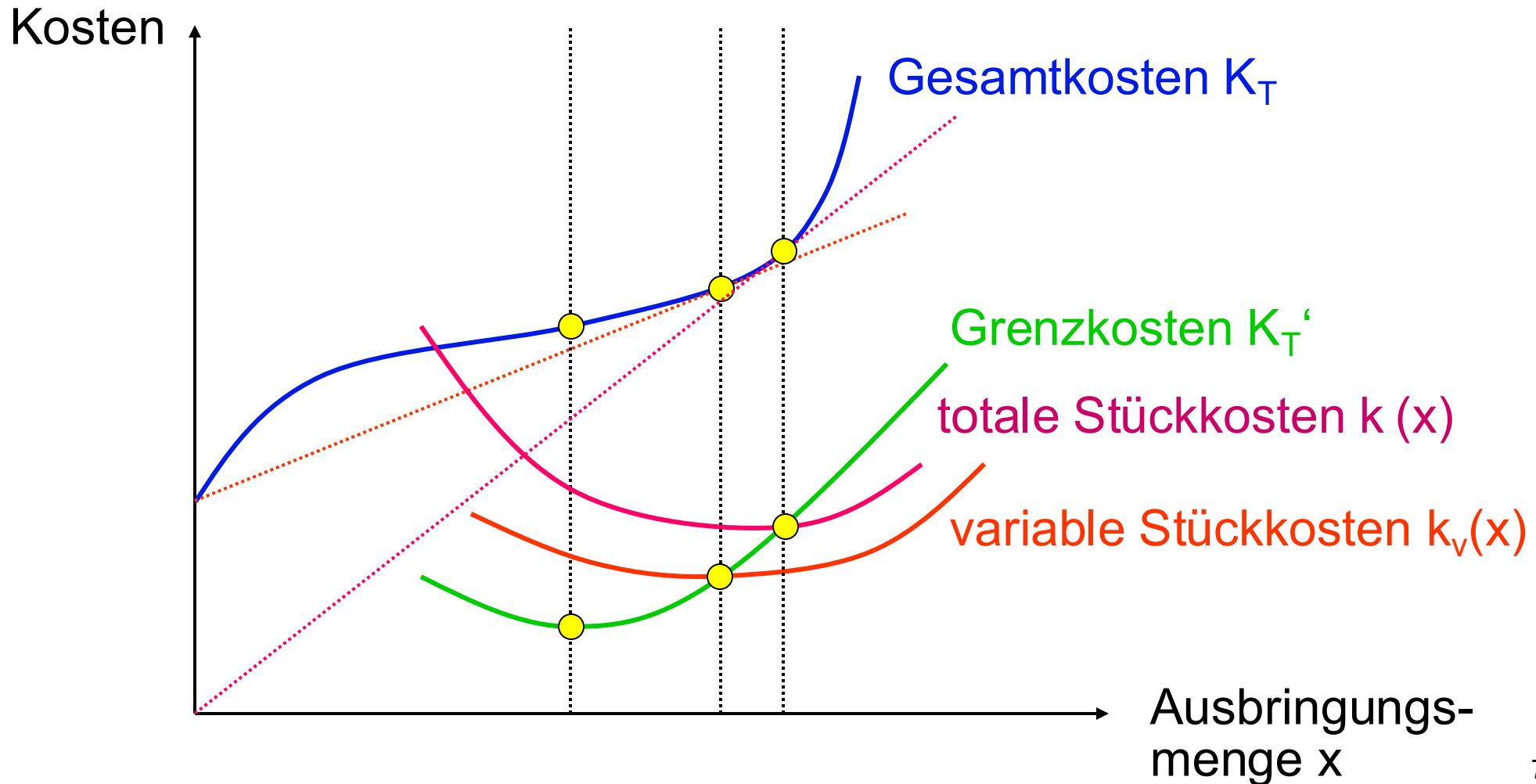
5.1 Einführendes Beispiel: Das Ertragsgesetz (Produktionsfunktion vom Typ A)



5.1 Einführendes Beispiel: Das Ertragsgesetz (Produktionsfunktion vom Typ A)

- **Ertrag**: landwirtschaftlicher Ertrag/produzierte Menge (x)
- **Grenzertrag** (erste Ableitung des **Ertrags**):
 - ⇒ (Mehr-)Ertrag, d.h. Ertrag, der durch den Einsatz einer zusätzlichen Einheit eines Rohstoffs (z.B. Dünger) über den bisherigen Ertrag hinaus entsteht.
- **Durchschnittsertrag**:
$$\frac{\text{Ertrag}}{\text{Rohstoffmenge}} = \frac{x}{r}$$

5.1 Einführendes Beispiel: Kostenfunktion für das Ertragsgesetz



5.1 Einführendes Beispiel: Kostenfunktion für das Ertragsgesetz

➤ **Gesamtkosten K_T** : variable Stückkosten $\cdot$ Menge + fixe Kosten

➤ **Grenzkosten K_T'** (erste Ableitung der **Gesamtkosten K_T**):

⇒ Kosten, die durch Produktion einer zusätzlichen Einheit eines Produktes über die bisherigen Kosten hinaus entstehen.

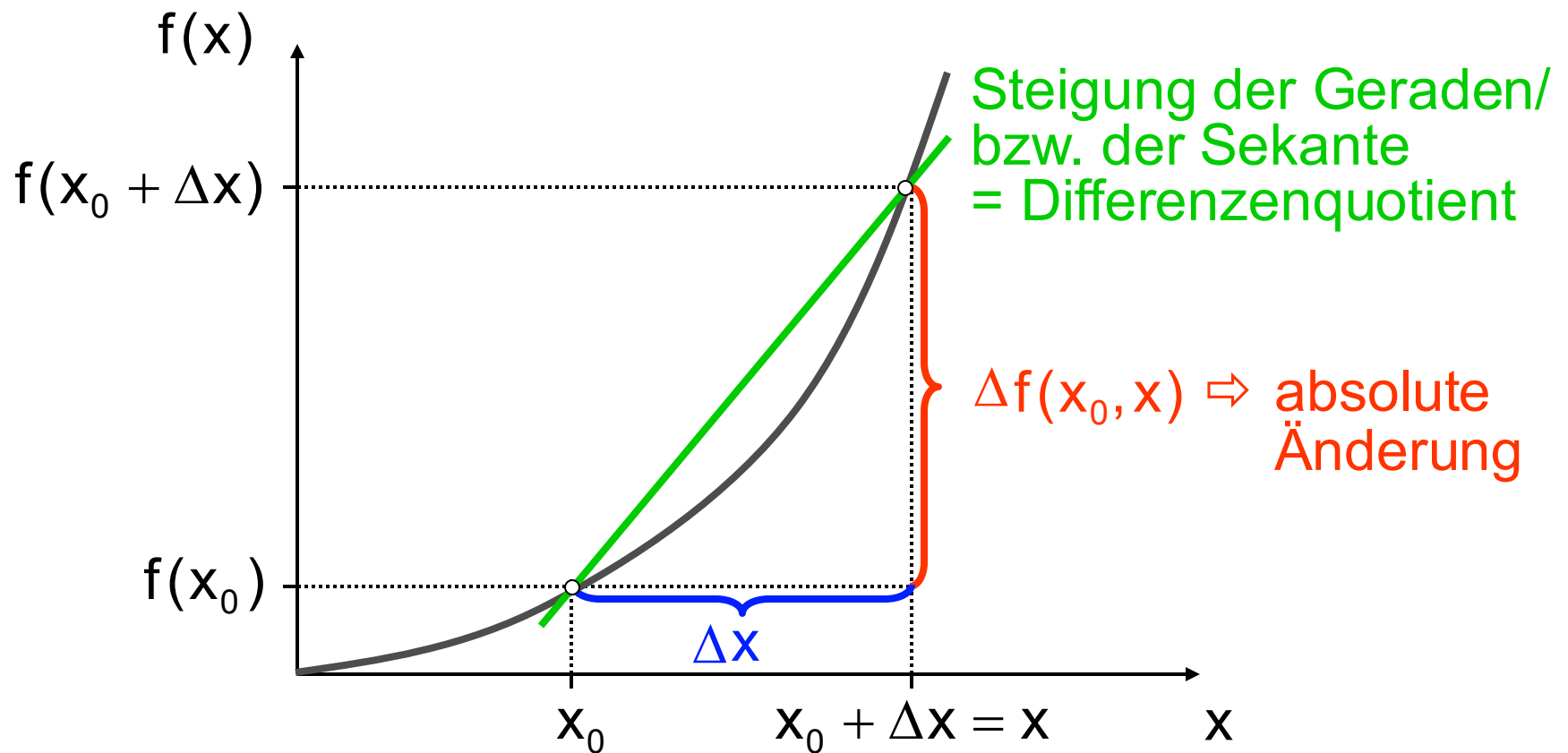
➤ **totale Stückkosten $k(x)$** :
$$\frac{\text{Gesamtkosten}}{\text{Menge}} = \frac{K_T}{x}$$

➤ **variable Stückkosten $k_v(x)$** :
$$\frac{\text{variable Gesamtkosten}}{\text{Menge}} = \frac{K_v}{x}$$

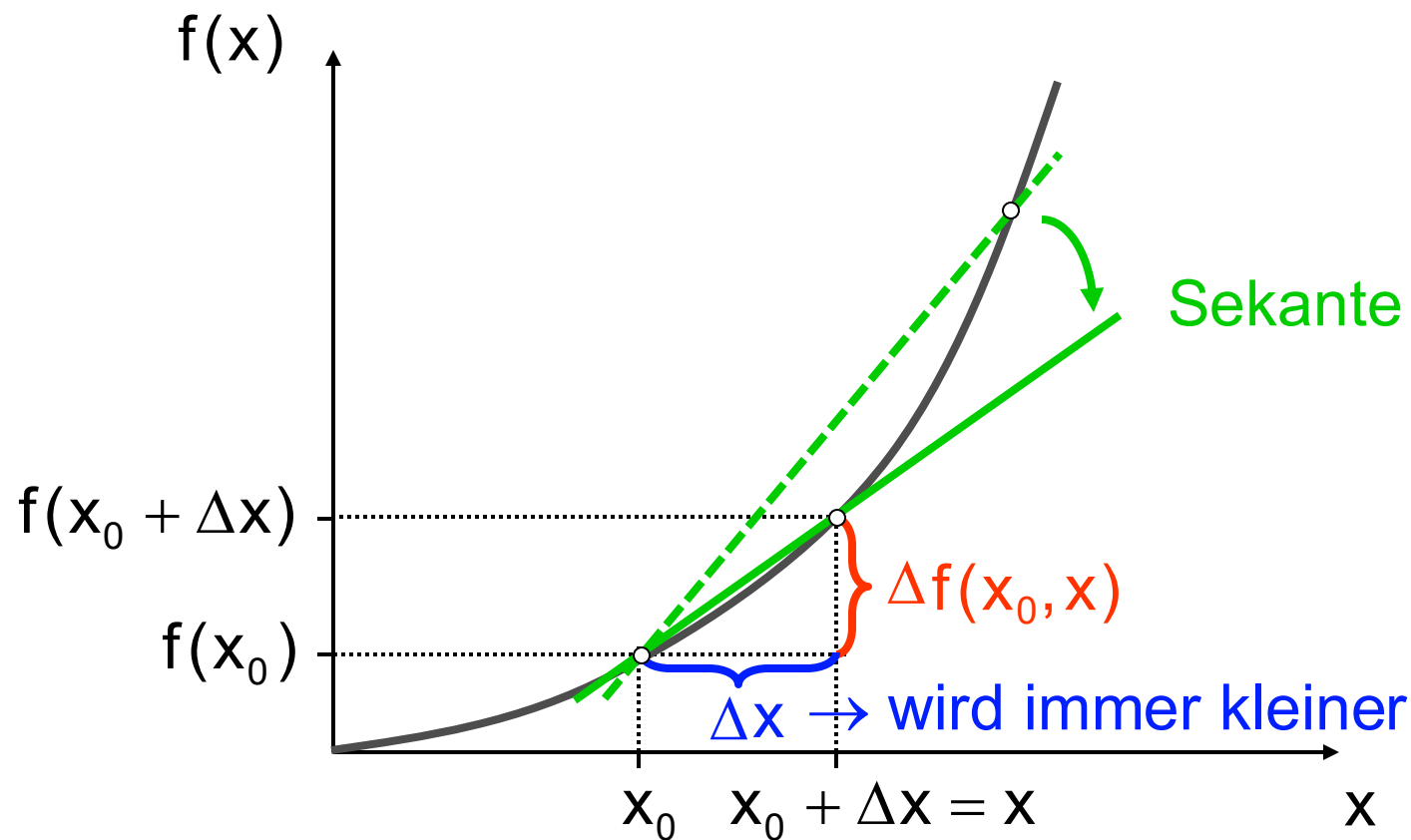
Gliederung

- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
 - 5.1 Einführendes Beispiel
 - 5.2 Grundzüge der Differentialrechnung
 - 5.2.1 Differenz, Differenzenquotient,
Differentialquotient und Differential
 - 5.2.2 Ableitungsregeln
 - 5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen
 - 5.4 Ökonomische Anwendung der Differentialrechnung
 - 5.4.1 Bestimmung und Interpretation von Extremwerten
ökonomischer Funktionen
 - 5.4.2 Ökonomische Maße

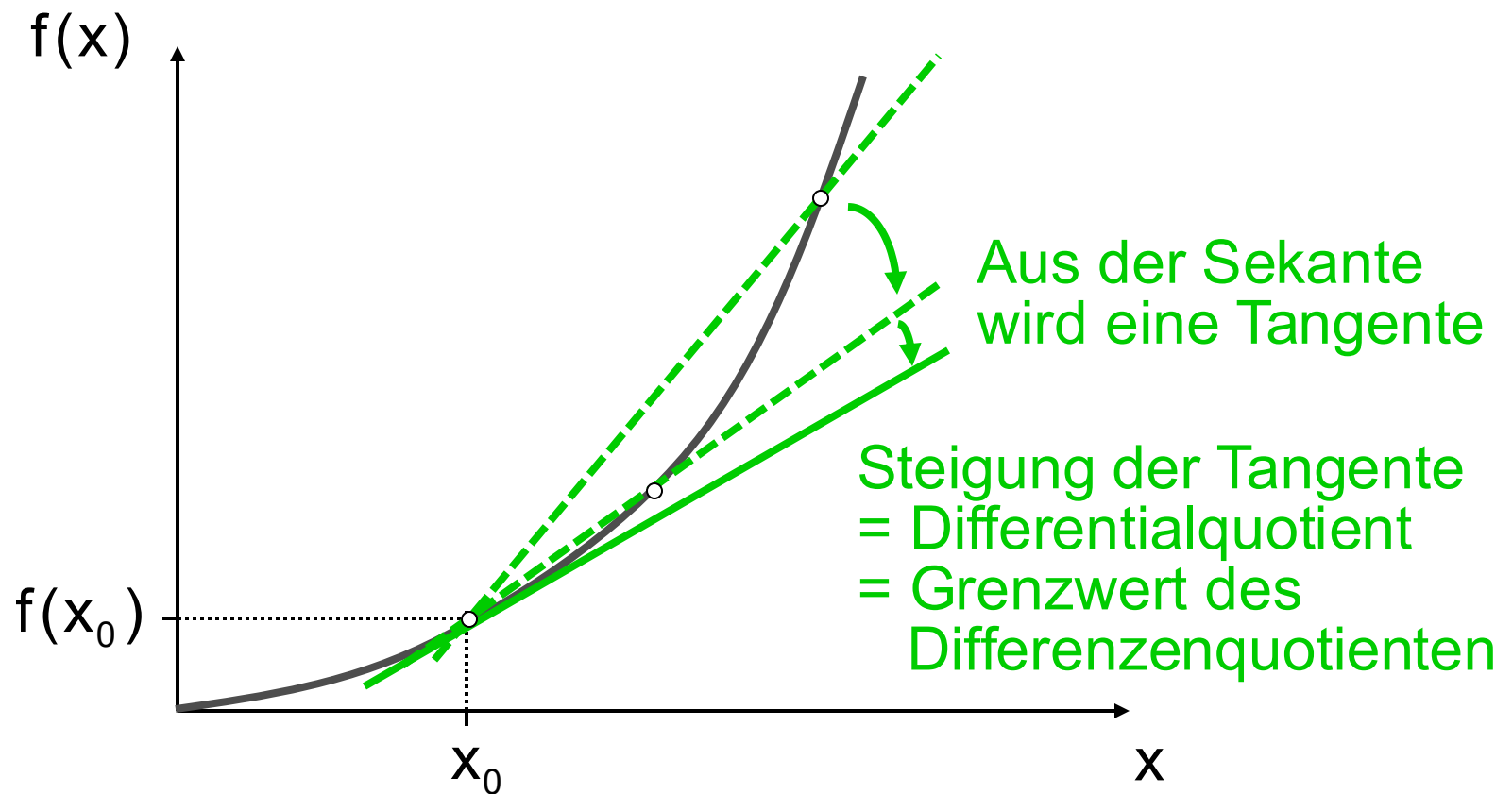
5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential



5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential



5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential



5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential

➤ Absolute Änderung:

$$\Delta f(x_0, x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

➤ Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

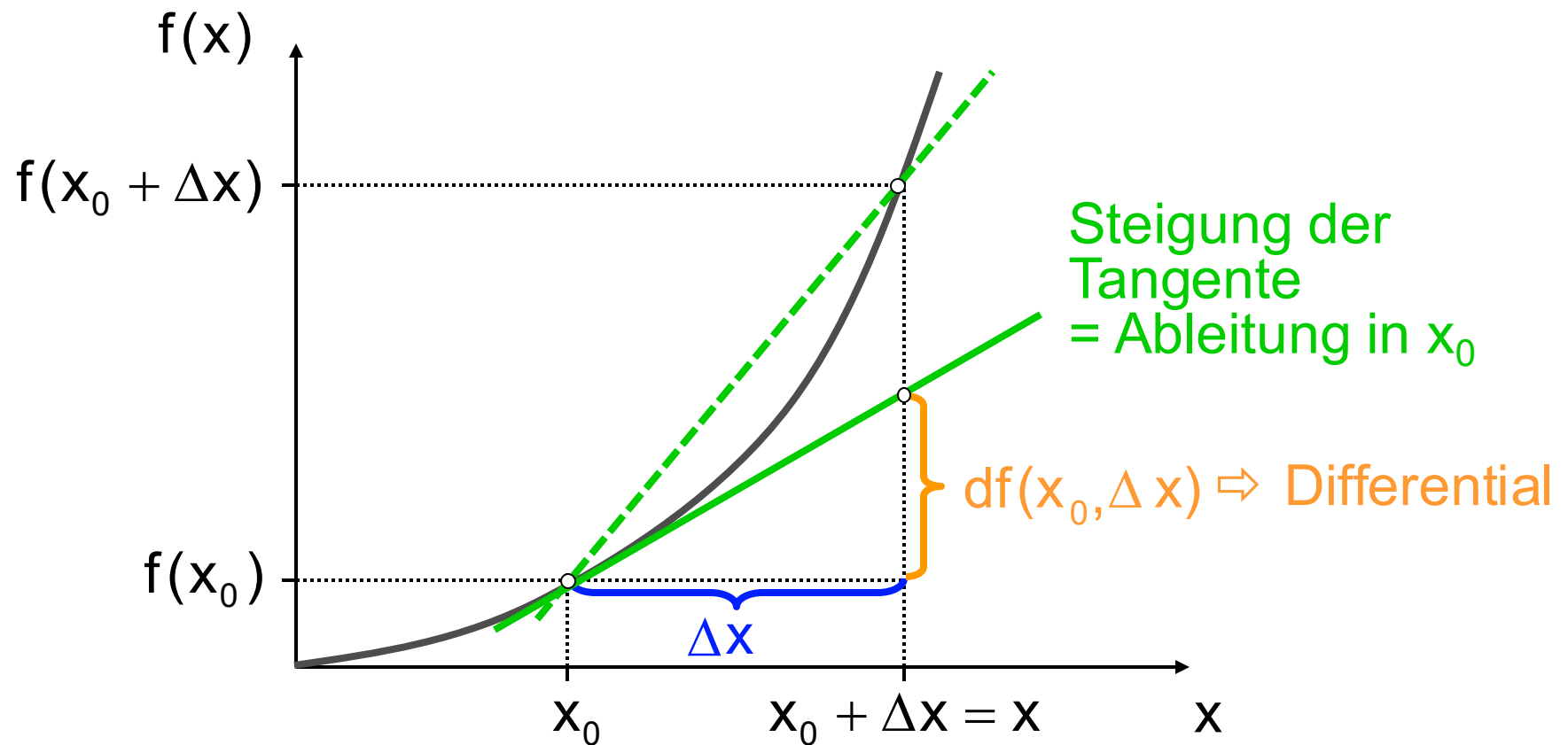
➤ Differentialquotient/Ableitung:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

➤ Differential:

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x \approx \Delta f(x_0, x)$$

5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential



5.2.2 Ableitungsregeln

➤ „Potenzregel“:

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}$$

➤ Faktorregel:

$$y = c \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot f'(x)$$

➤ Summenregel:

$$y = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad y' = g'(x) + h'(x)$$

5.2.2 Ableitungsregeln

➤ Produktregel:

$$y = g(x) \cdot h(x) = g \cdot h \quad \Rightarrow \quad y' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

➤ Quotientenregel:

$$y = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g}{h} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

➤ Kettenregel:

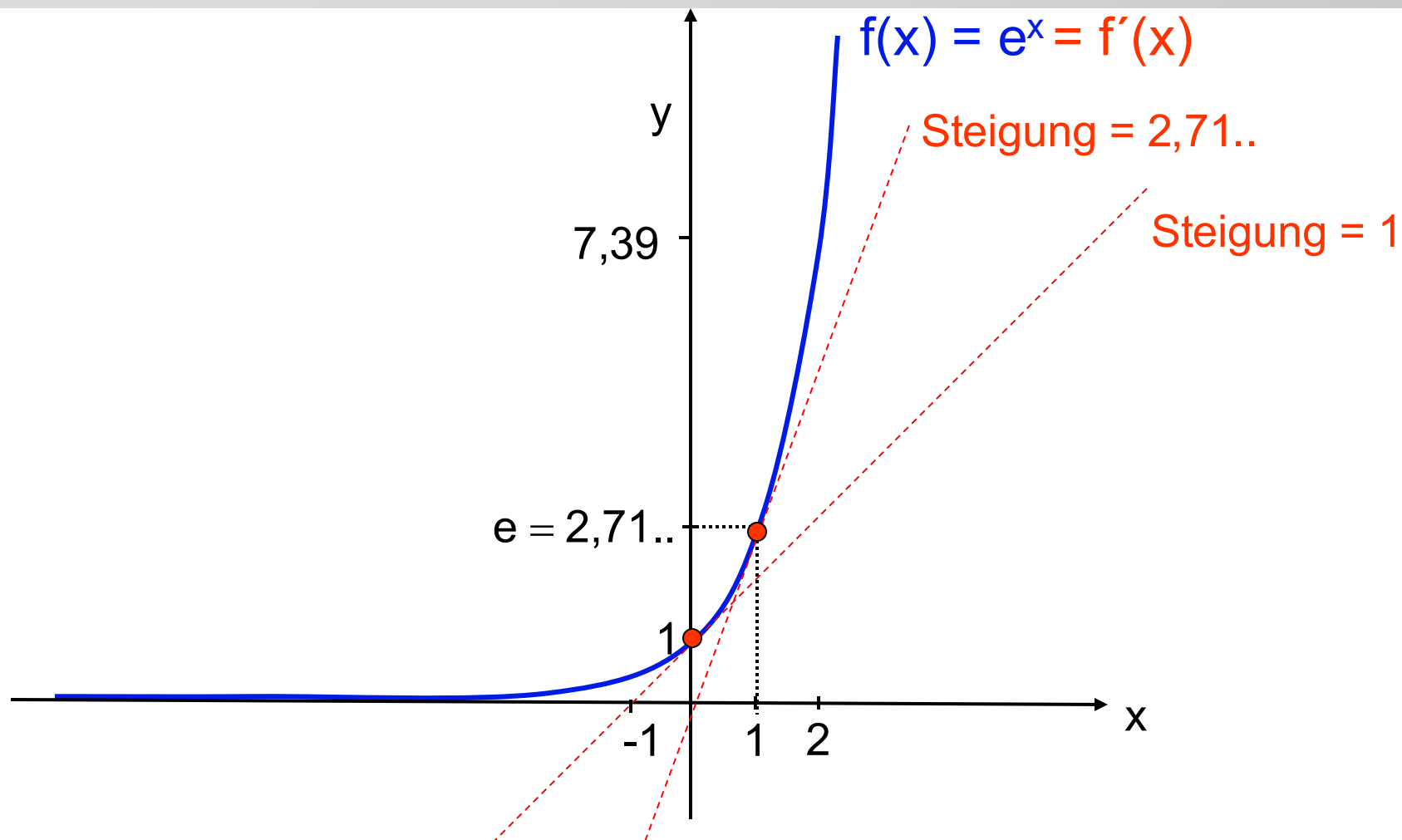
$$y = g(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

5.2.2 Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

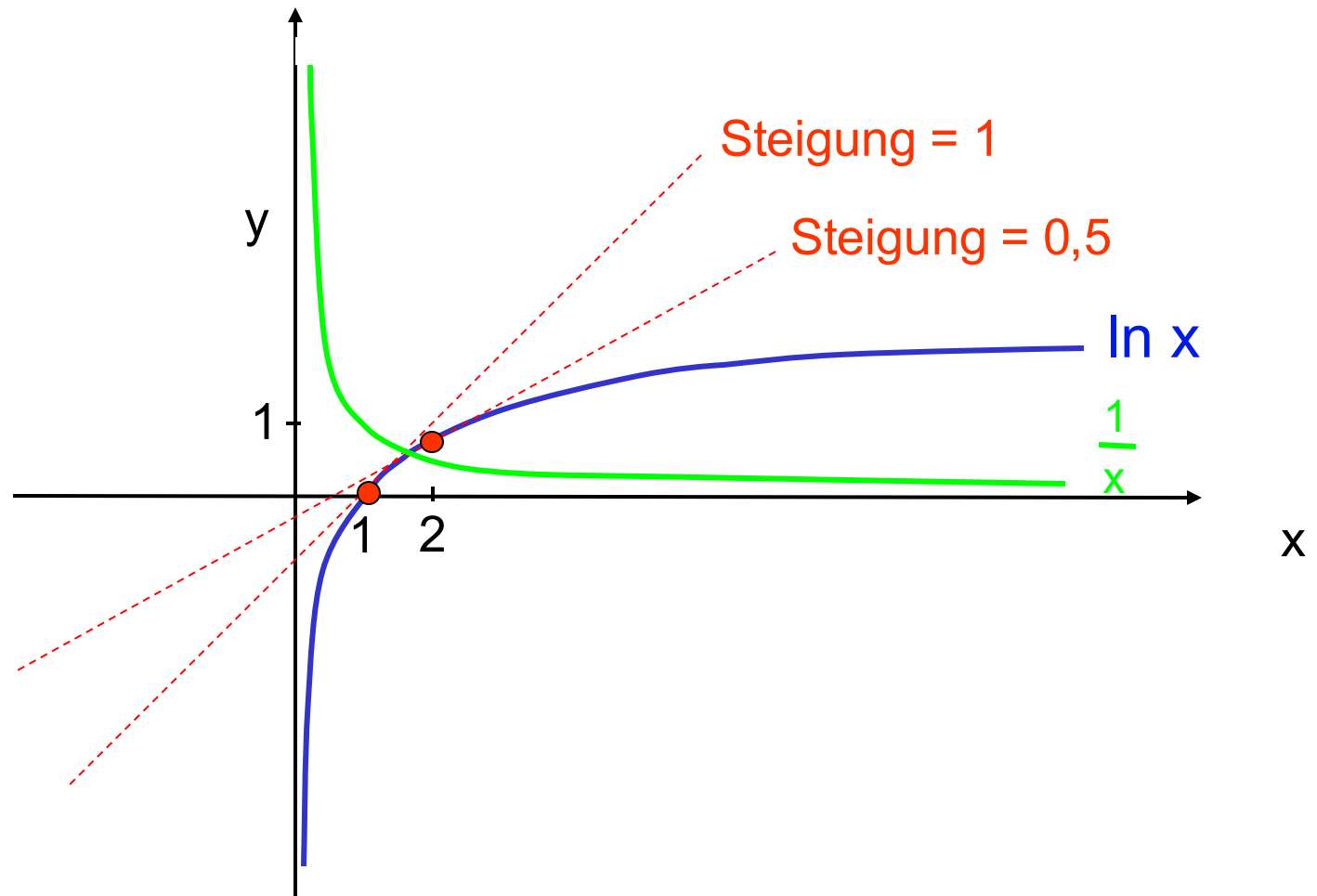
5.2.2 Ableitungsregeln

Graph einer Exponentialfunktion und ihrer Ableitung



5.2.2 Ableitungsregeln

Graph einer Logarithmusfunktion ($\ln x$) und ihrer Ableitung ($\frac{1}{x}$)



5.2.2 Ableitungsregeln

➤ Exkurs: Herleitung der Ableitungen

Funktion	Ableitung
$f(x) = a^x$ $= e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$	$f'(x) = \overbrace{e^{x \cdot \ln a}}^{\text{äußere Ableitung}} \cdot \overbrace{\ln a}^{\text{innere Ableitung}} = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \log_a x$ $= \frac{\ln x}{\ln a}$	$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

5.2.2 Ableitungsregeln

➤ Beispiele:

a) **Potenzregel:** $f(x) = x^2,$ $f'(x) = 2x$

b) **Faktorregel:** $f(x) = 5x,$ $f'(x) = 5 \cdot 1 = 5$

c) **Summenregel:** $f(x) = x^2 + 5x,$ $f'(x) = 2x + 5$

d) **Produktregel:** $f(x) = x^2 \cdot \ln(x),$ $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2/x = 2x \cdot \ln(x) + x$

e) **Quotientenregel:**

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, \quad f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x+1} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x+1}}}{x+1}$$

f) **Kettenregel:**

$$f(x) = e^{x^2} \quad f'(x) = e^{x^2} \cdot 2 \cdot x$$

Gliederung

- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
 - 5.1 Einführendes Beispiel
 - 5.2 Grundzüge der Differentialrechnung
 - 5.2.1 Differenz, Differenzenquotient,
Differentialquotient und Differential
 - 5.2.2 Ableitungsregeln
 - 5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen
 - 5.4 Ökonomische Anwendung der Differentialrechnung
 - 5.4.1 Bestimmung und Interpretation von Extremwerten
ökonomischer Funktionen
 - 5.4.2 Ökonomische Maße

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

- Definitionslücken und Stetigkeit (siehe Kapitel 4)
- Beschränktheit (siehe Kapitel 4)
- Nullstellen (siehe Kapitel 4)
- Differenzierbarkeit
- Monotonieverhalten und Extremwerte
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte
- Graphische Darstellung (siehe auch Kapitel 4)

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

➤ Stetigkeit:

Rechtsseitiger und linksseitiger **Grenzwert** existieren und stimmen mit dem **Funktionswert** überein (siehe Kapitel 4):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in ID$$

➤ Differenzierbarkeit:

Grenzwert des Differenzenquotienten existiert (d.h. $\neq \pm\infty$) für alle Werte x_0 des Definitionsbereichs. Diesen Grenzwert bezeichnet man als die Ableitung von f (an der Stelle x_0) und schreibt $f'(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in ID$$

An den Randpunkten des Definitionsbereiches ist eine Funktion $f(x)$ nur einseitig differenzierbar.

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

➤ Monotonie:

- monoton steigend $:\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
- monoton fallend $:\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$
- streng monoton steigend $:\Leftrightarrow f'(x) > 0$
- streng monoton fallend $:\Leftrightarrow f'(x) < 0$

➤ Relative Extrema (vereinfacht):

- relatives Maximum $:\Leftrightarrow \overset{!}{f'(x_{\text{opt}})} = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_{\text{opt}}) < 0$
- relatives Minimum $:\Leftrightarrow \overset{!}{f'(x_{\text{opt}})} = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_{\text{opt}}) > 0$

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

➤ Krümmungsverhalten:

■ konvex $:\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

■ konkav $:\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$

■ streng konvex $:\Leftrightarrow f''(x) > 0$

■ streng konkav $:\Leftrightarrow f''(x) < 0$

➤ Wendepunkte (vereinfacht):

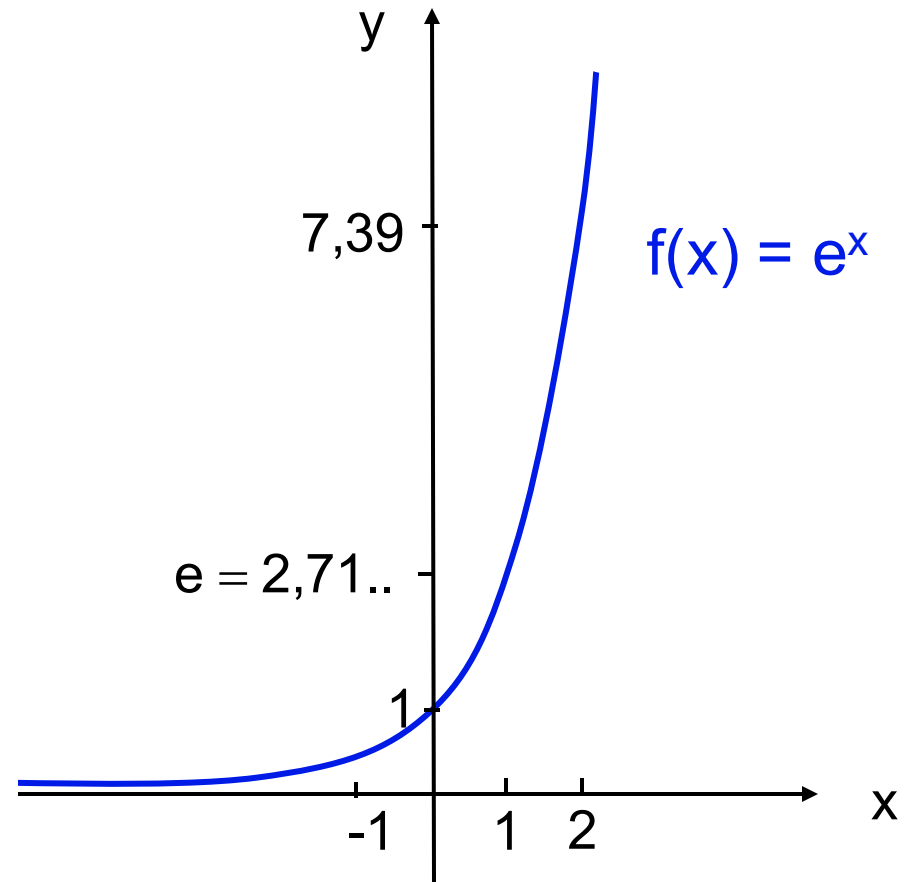
$$:\Leftrightarrow \overset{!}{f''(x_{\text{opt}})} = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_{\text{opt}}) \neq 0$$

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

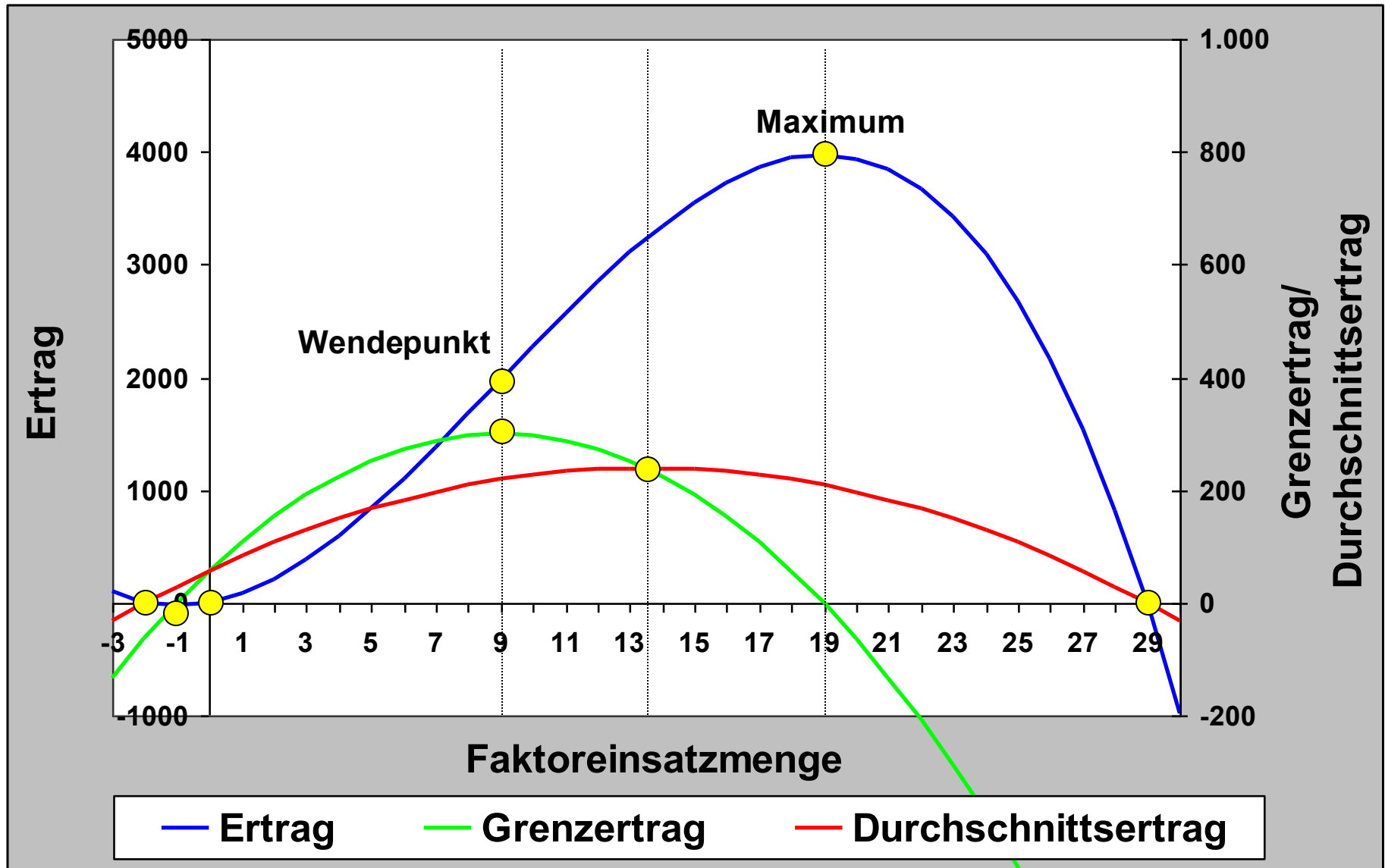
Beispiel:

Die e-Funktion

- ist stetig,
- nach oben nicht beschränkt,
- hat keine Nullstellen,
- ist differenzierbar,
- ist streng monoton steigend,
- hat keine relativen Extrema
- und ist streng konvex.



5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen am Beispiel des Ertragsgesetzes



Gliederung

- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
 - 5.1 Einführendes Beispiel
 - 5.2 Grundzüge der Differentialrechnung
 - 5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen
 - 5.4 Ökonomische Anwendung der Differentialrechnung
 - 5.4.1 Bestimmung und Interpretation von Extremwerten
ökonomischer Funktionen
 - 5.4.1.1 Das Cournot'sche Theorem
 - 5.4.1.2 Das Ertragsgesetz
 - 5.4.2 Ökonomische Maße

5.4.1.1 Das Cournot'sche Theorem

- Ein Monopolist produziere ein Gut, dessen **Preis-Absatz-Funktion** am Markt

$$h :]0; 10[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = h(x) = 100 - 10 \cdot x$$

sei. Für die Herstellung der Ausbringungsmenge x entstehen dem Monopolisten Kosten. Die nachstehende **Gesamtkostenfunktion** stellt die Kosten in Abhängigkeit von der Menge x dar.

$$f :]0; 10[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K = f(x) = x^2 - 10 \cdot x + 50$$

- Bestimmen Sie die „**gewinnmaximale**“ **Ausbringungsmenge** x_0 mit Hilfe des **Cournot'schen Theorems**! Wie lauten die **hinreichenden Bedingungen** für das Vorliegen eines relativen Maximums? Welches ist der **maximal erzielbare Gewinn**?

5.4.1.1 Das Cournot'sche Theorem

COURNOT'SCHES THEOREM:

Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x) \rightarrow \max!$$

Notwendige
Bedingung:

$$G'(x) = E'(x) - K'(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{E'(x)}_{\text{Grenz-erlöse}} = \underbrace{K'(x)}_{\text{Grenz-kosten}}$$



Hinreichende:
Bedingung

$$G''(x) = E''(x) - K''(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow E''(x) < K''(x)$$

5.4.1.1 Das Cournot'sche Theorem

Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x = (100 - 10 \cdot x) \cdot x = 100 \cdot x - 10 \cdot x^2$

Kostenfunktion: $K(x) = x^2 - 10 \cdot x + 50$

Notwendige
Bedingung: $E'(x) \stackrel{!}{=} K'(x)$
also: $100 - 20 \cdot x \stackrel{!}{=} 2 \cdot x - 10 \Rightarrow x_0 = 5$

Hinreichende
Bedingung: $E''(x) < K''(x)$
 $-20 < 2$ ist für alle x (auch für $x_0 = 5$) erfüllt

Gewinnfunktion: $G(x) = 100 \cdot x - 10 \cdot x^2 - (x^2 - 10 \cdot x + 50)$
 $= -11 \cdot x^2 + 110 \cdot x - 50$
 $G(x_0 = 5) = 225$

5.4.1.2 Das Ertragsgesetz

Ertrag: $f(r) = -r^3 + 27 \cdot r^2 + 57 \cdot r$

Grenzertrag: $f'(r) = -3 \cdot r^2 + 54 \cdot r + 57 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_{\text{Max}} = 19$

$$f''(r) = -6 \cdot r + 54 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_{\text{Wende}} = 9$$

Durchschnitts-
ertrag:

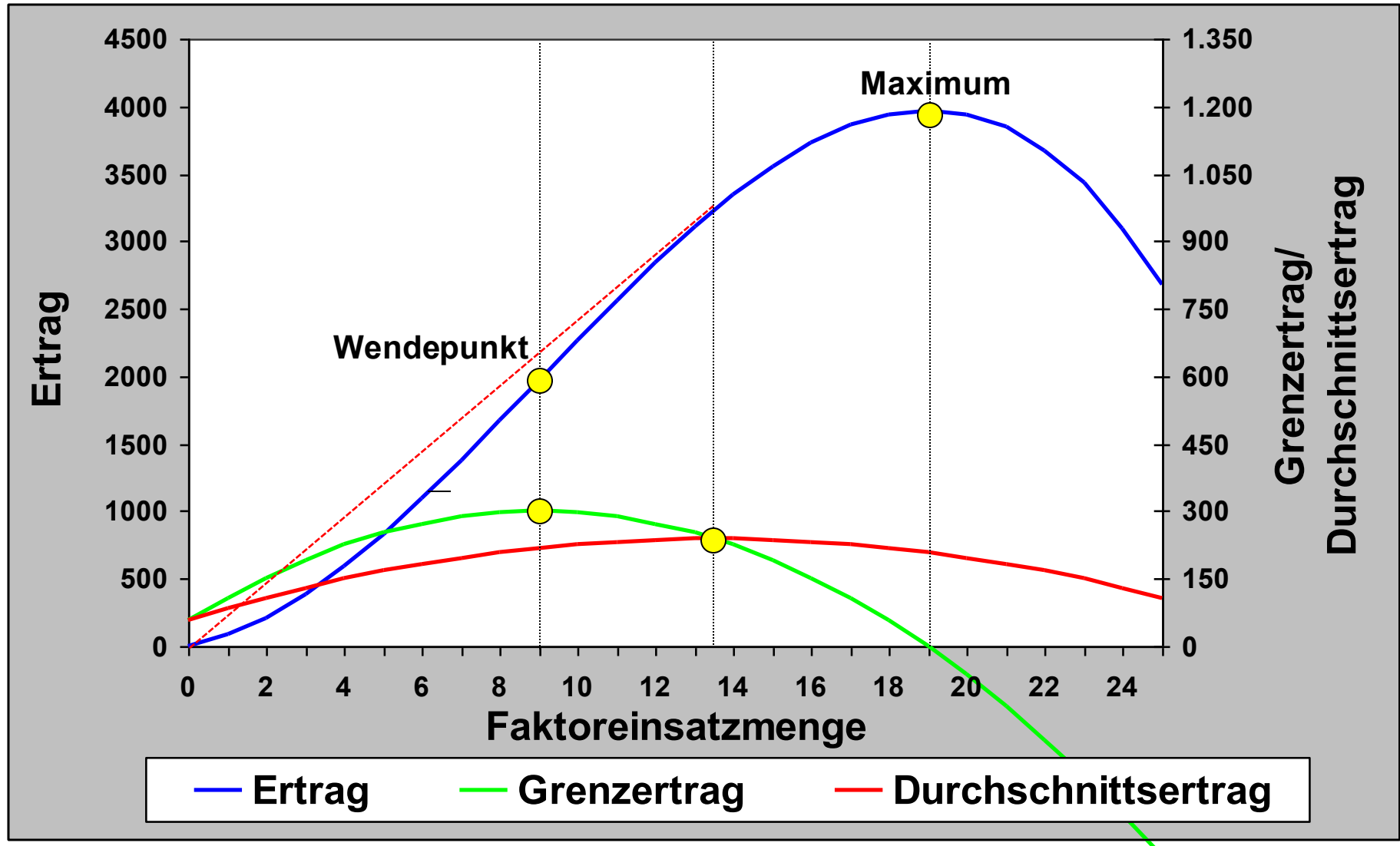
$$\frac{f(r)}{r} = -r^2 + 27 \cdot r + 57$$

$$\left(\frac{f(r)}{r} \right)' = -2 \cdot r + 27 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_{\text{D-Max}} = 13,5$$

Bei $r = 13,5$ gilt : $\frac{f(13,5)}{13,5} = f'(13,5)$

$$\Leftrightarrow 239,25 = 239,25$$

5.4.1.2 Das Ertragsgesetz

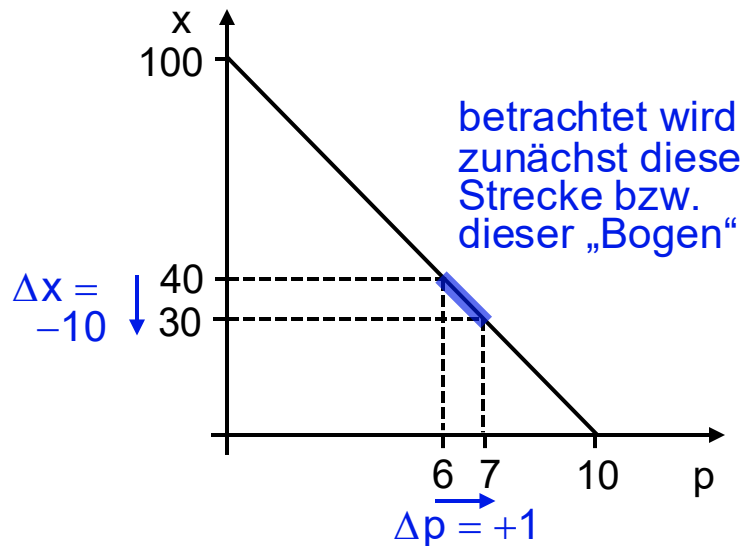


Gliederung

- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
 - 5.1 Einführendes Beispiel
 - 5.2 Grundzüge der Differentialrechnung
 - 5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen
 - 5.4 Ökonomische Anwendung der Differentialrechnung
 - 5.4.1 Bestimmung und Interpretation von Extremwerten
ökonomischer Funktionen
 - 5.4.2 Ökonomische Maße

5.4.2 Ökonomische Maße

Beispiel: Nachfragefunktion $f : [0;10] \rightarrow [0;100]$ mit $p \rightarrow x = f(p) := 100 - 10p$



Bogenelastizität η_{xp} der Nachfrage x in Bezug auf den Preis p :

Steigt der Preis im Preisintervall $p \in [6;7]$ um 1%, so sinkt die Nachfrage in diesem Intervall durchschnittlich um 1,5%.

Der Preis steigt um $\Delta p = 7 - 6 = +1$ bzw. relativ um $\Delta p/p = +1/6 = 0,1667$, also um 16,67%.

Dann verändert sich die Nachfrage um $\Delta x = 30 - 40 = -10$ bzw. relativ um $\Delta x/x = -10/40 = -0,25$, also um -25%.

Der Differenzenquotient beträgt: $\frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{-10}{+1}$

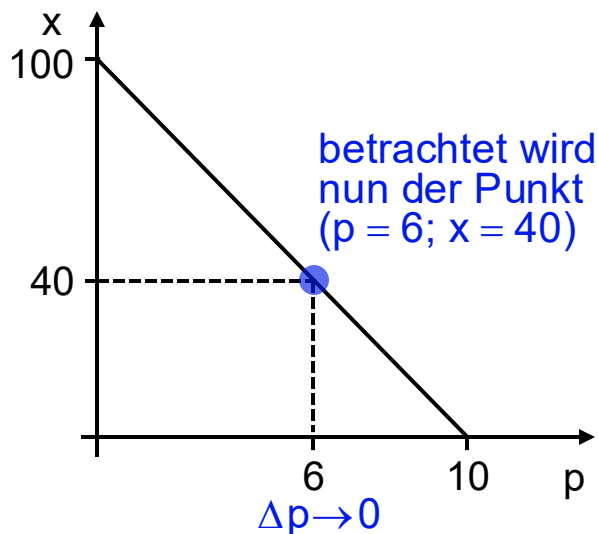
Die Bogenelastizität beträgt:

$$\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{-10}{40}}{\frac{+1}{6}} = \frac{-25\%}{+16,67\%} = \frac{-1,5\%}{+1\%} = -1,5$$

$$\text{bzw. } \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{p}{\Delta p} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x} = \eta_{xp}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

Beispiel: Nachfragefunktion $f : [0;10] \rightarrow [0;100]$ mit $p \rightarrow x = f(p) := 100 - 10p$



Punkt Elastizität ε_{xp} der Nachfrage x in Bezug auf den Preis p :

Steigt der Preis – ausgehend von einem Preis von $p = 6$ – um 1%, so sinkt die Nachfrage um 1,5%.

Aus dem Differenzenquotient wird der Differentialquotient:

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{dx}{dp} = f'(p)$$

Aus der Bogenelastizität wird die Punkt Elastizität:

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \varepsilon_{xp}$$

Die Punkt Elastizität beträgt:

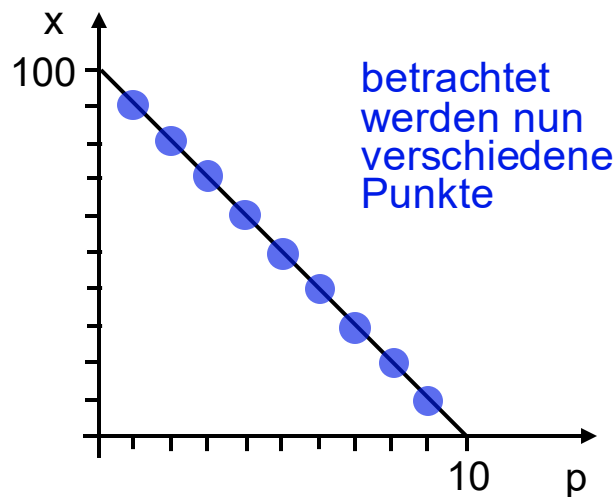
$$\varepsilon_{xp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = -10 \cdot \frac{6}{40} = -\frac{60}{40} = -1,5 \quad [\%]$$

Und die Elastizitätsfunktion lautet:

$$\varepsilon_{xp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = -10 \cdot \frac{p}{100 - 10p} = \frac{p}{p - 10}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

Beispiel: Nachfragefunktion $f : [0;10] \rightarrow [0;100]$ mit $p \rightarrow x = f(p) := 100 - 10p$



Elastizitätsfunktion:

$$\varepsilon_{xp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \frac{p}{p-10}$$

In diesem Beispiel ist die **Steigung** dx/dp immer -10 .

Die **Punktelastizität** ändert sich aber bei jedem Preis.

Preis p	Elastizität ε_{xp}	Bereich
1	$1/(1-10) = -1/9 = -0,11$	unelastisch
2	$2/(2-10) = -2/8 = -0,25$	
3	$3/(3-10) = -3/7 = -0,43$	
4	$4/(4-10) = -4/6 = -0,67$	
5	$5/(5-10) = -5/5 = -1$	1-elastisch
6	$6/(6-10) = -6/4 = -1,5$	elastisch
7	$7/(7-10) = -7/3 = -2,33$	
8	$8/(8-10) = -8/2 = -4$	
9	$9/(9-10) = -9/1 = -9$	

5.4.2 Ökonomische Maße

➤ Bogenelastizität (allgemein):

- ⇒ gibt das Verhältnis der relativen Änderung des Funktionswertes zur relativen Änderung der unabhängigen Variable an
- ⇒ gibt somit die durchschnittliche Elastizität im Intervall Δx an

$$\eta_{fx}(x_0) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

➤ Punktelastizität (allgemein):

⇒ gibt näherungsweise an, **um wieviel Prozent** sich die **abhängige Variable** ändert bei einer **einprozentigen** Änderung der **unabhängigen Variablen**

⇒ **Grenzwert** der Bogenelastizität: Δx läuft gegen null

$$\begin{aligned}\varepsilon_{fx}(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta_{yx} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}\end{aligned}$$

➤ Elastizitätsfunktion:

$$\varepsilon_{fx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

Wert der Elastizität	Elastizitätsgrad der Funktion
$\varepsilon = 0$	vollkommen unelastisch
$0 < \varepsilon < 1$	inelastisch
$ \varepsilon = 1$	1-elastisch (proportional elastisch)
$ \varepsilon > 1$	elastisch
$ \varepsilon \rightarrow \infty$	vollkommen elastisch

5.4.2 Ökonomische Maße

➤ Ökonomische Beispiele:

⇒ **Preiselastizität der Nachfrage**

bzw. Elastizität der Nachfrage in bezug auf den Preis

$$p \rightarrow x = f(p) \qquad \varepsilon_{xp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$$

⇒ **Nachfrageelastizität des Preise**

bzw. Elastizität der Preis-Absatz-Funktion in bezug auf die nachgefragte Menge

$$x \rightarrow p = f(x) \qquad \varepsilon_{px} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

➤ Beispiel: Preiselastizität der Nachfrage

⇒ Fall: $\varepsilon = -1$, d. h. $|\varepsilon| = 1$ bzw. Nachfrage **1-elastisch**:

„Erhöht man den Preis um 1%, so sinkt die Nachfrage (proportional) ebenfalls um 1%.“

⇒ Fall: $\varepsilon = -0,5$, d. h. $0 < |\varepsilon| < 1$ bzw. Nachfrage **unelastisch**:

Erhöht man den Preis um 1%, so sinkt die Nachfrage (unterproportional) nur um 0,5%.“

⇒ Fall: $\varepsilon < -1$, d. h. $|\varepsilon| > 1$ bzw. Nachfrage **elastisch**:

„Erhöht man den Preis um 1%, so sinkt die Nachfrage überproportional, also um mehr als 1%.“

Jetzt folgt Kapitel 6:

Integralrechnung

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615