



Bachelor Betriebswirtschaft

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Michael Bucker

Prof. Dr. Michael Bucker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte
- 4 Funktionen**
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
- 6 Integralrechnung
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen



Kapitel 4:

Funktionen

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

4 Funktionen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2. Der Begriff der Funktion

4.3 Die Darstellung von Funktionen

4.4 Mathematische Funktionstypen

4.4.1 Mathematische Funktionstypen

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen

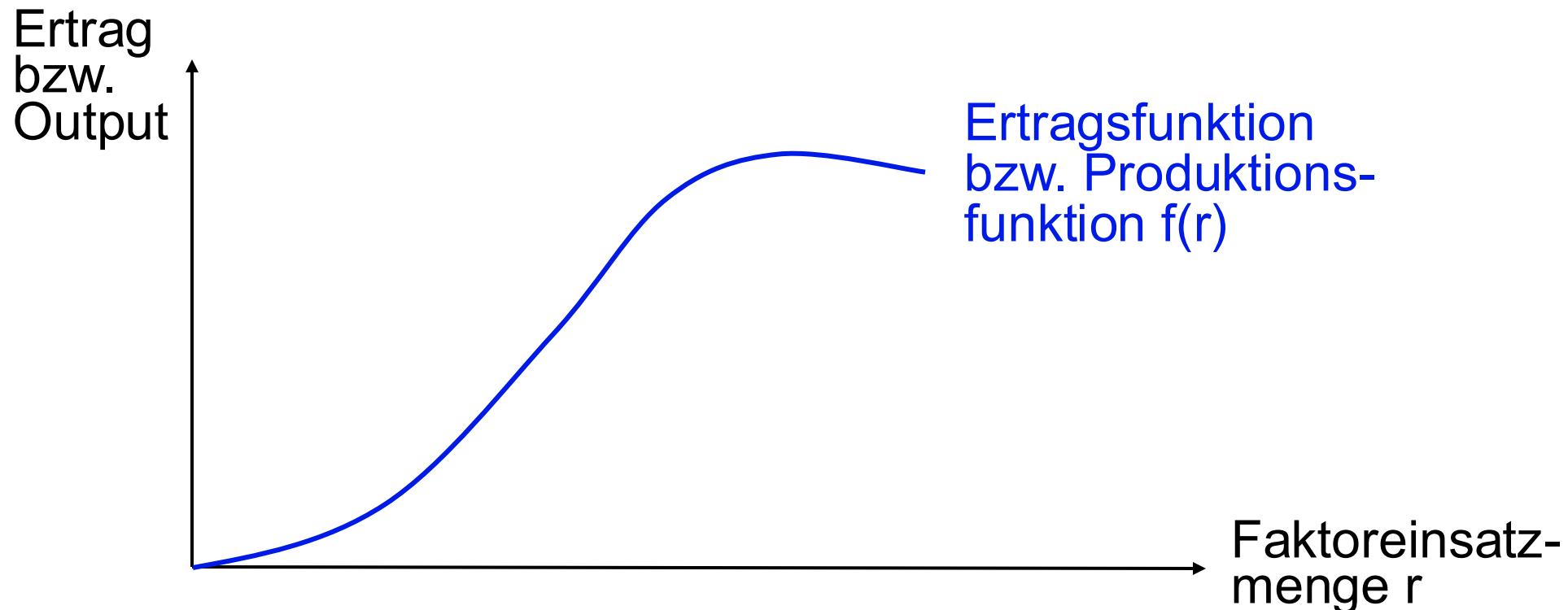
4.5 Ökonomische Anwendungen

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

4.5.2 Die Break-Even-Analyse

4.1 Einführendes Beispiel

- Ein Beispiel für eine Funktion und ihren Kurvenverlauf:
Der Ertrag in der Landwirtschaft als **Funktion** vom Faktor Arbeit
(das sogenannte **Ertragsgesetz**):



4.1 Einführendes Beispiel

- Das **Ertragsgesetz** ist eine der ältesten Produktionsfunktionen. Das Ertragsgesetz geht zurück auf Anne Robert Jacques **Turgot** (1727 bis 1781), Finanzminister unter Ludwig XVI:

In der Landwirtschaft führt der vermehrte Einsatz des Faktors Arbeit (z.B. Pflügen des Ackers) bei konstanten Einsatzmengen der anderen Faktoren zunächst zu steigenden und später zu fallenden Ertragszuwächsen (Grenzerträgen). Mit Ertrag ist der landwirtschaftliche Output gemeint.

Das Ertragsgesetz wurde später von **Johann Heinrich von Thünen** (1783 bis 1850), Gutsbesitzer, ansässig in Tellow in Mecklenburg in empirischen Analysen bestätigt.

4.1 Einführendes Beispiel

➤ Weitere Beispiele für das Ertragsgesetz:

- ⇒ Durch den kontinuierlich gesteigerten Gebrauch von Düngemitteln (bei sonst gleich bleibenden Ressourcen/Bedingungen, also z. B. gleich bleibender Fläche) wächst der Ertrag zunächst stetig an. Der Ertragszuwachs je zusätzlich ausgebrachter Düngemittelmenge nimmt ab einer bestimmten Ausbringungsmenge ab. Dies führt bei weiterer Düngerausbringung schließlich sogar zu einer Gesamtertragsminderung und sogar zur Bodenvergiftung: Ein überhöhter Einsatz von Düngemitteln wird den Ertrag unter das Niveau führen, das ohne Düngemittel erreicht worden wäre und schließlich jeden Ertrag vernichten.
- ⇒ Ähnliche Beobachtungen können auch bei den Faktoren Wärme und Wasser gemacht werden.

Gliederung

4 Funktionen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2. Der Begriff der Funktion

4.3 Die Darstellung von Funktionen

4.4 Mathematische Funktionstypen

4.4.1 Mathematische Funktionstypen

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften
mathematischer Funktionstypen

4.5 Ökonomische Anwendungen

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

4.5.2 Die Break-Even-Analyse

4.2 Der Begriff der Funktion

➤ Eine Abbildung

$$f : A \rightarrow B \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x)$$

heißt **(reelle) Funktion einer (reellen) Variablen**,
falls $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$

Jedem Element aus A wird somit eindeutig ein Element aus B zugeordnet.

➤ Schreibweisen:

■ **Explizite** Schreibweise: $y = f(x)$ z.B. $y = x^2 + 1$

■ **Implizite** Schreibweise: $f(x, y) = c$ z.B. $x^2 - y = -1$

4.3 Die Darstellung von Funktionen

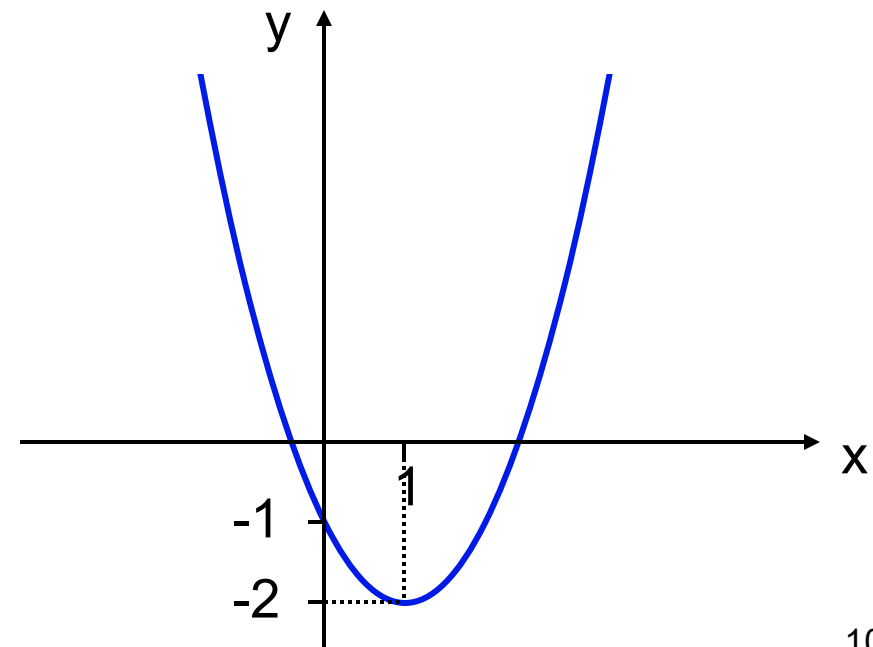
1. Darstellung in
Gleichungsform
(Funktionsgleichung)

$$y = f(x) = (x - 1)^2 - 2$$

2. Darstellung durch eine
Wertetabelle

x	-1	0	1	2	3
y = f(x)	2	-1	-2	-1	2

3. **Graphische Darstellung**
des Funktionsverlaufs
in einem Koordinaten-
system



Gliederung

4 Funktionen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2 Der Begriff der Funktion

4.3 Die Darstellung von Funktionen

4.4 Mathematische Funktionstypen

4.4.1 Mathematische Funktionstypen

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften
mathematischer Funktionstypen

4.5 Ökonomische Anwendungen

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

4.5.2 Die Break-Even-Analyse

4.4.1 Mathematische Funktionstypen: Reelle Funktionen

➤ Algebraische Funktionen:

■ ganzrationale Funktionen (Polynome)

◆ Polynom **ersten** Grades (lineare Funktionen)

$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

◆ Polynom **zweiten** Grades (quadratische Funktionen)

$$y = f(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

◆ Polynom **dritten** Grades (kubische Funktionen)

◆ Polynom **höheren** Grades

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

■ gebrochenrationale Funktionen (Quotient aus zwei Polynomen)

■ irrationale Funktionen: Wurzelfunktionen

$$\text{z.B. } y = f(x) = \sqrt{x}$$

4.4.1 Mathematische Funktionstypen: Reelle Funktionen

➤ Transzendente Funktionen

■ Exponentialfunktion

$$y = f(x) = b^x$$

■ logarithmische Funktionen

$$y = f(x) = \log_a x$$

■ (trigonometrische Funktionen)

$$\text{z.B. } y = f(x) = \sin x$$

$$y = f(x) = \cos x$$

$$y = f(x) = \tan x$$

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen

➤ **Definitionsücken:** (siehe hinten)

- Lücke (stetig fortsetzbar)
- Sprung
- Pol (unendlicher Sprung) mit/ohne Vorzeichenwechsel

➤ **Grenzwert oder Limes ($\lim f(x_0)$):**

(Definition und Berechnung des Grenzwertes siehe hinten)

derjenige Wert, dem sich die Funktion f in der Umgebung der betrachteten Stelle x_0 annähert. Ein solcher Grenzwert existiert jedoch nicht in allen Fällen.

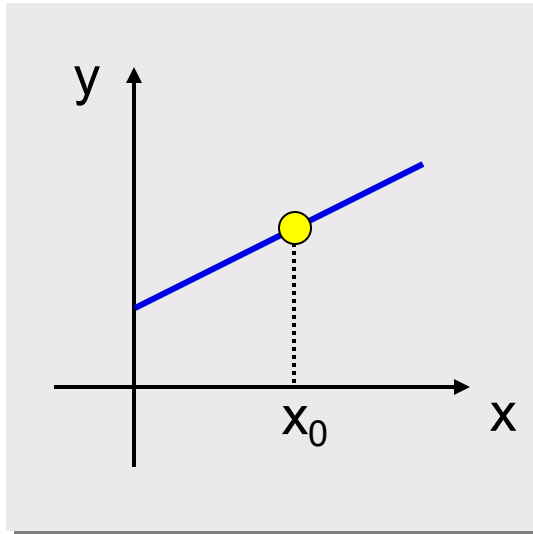
➤ **Stetigkeit:** f heißt stetig $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in ID}} f(x) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in ID$,
d. h. Grenzwert = Funktionswert

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen

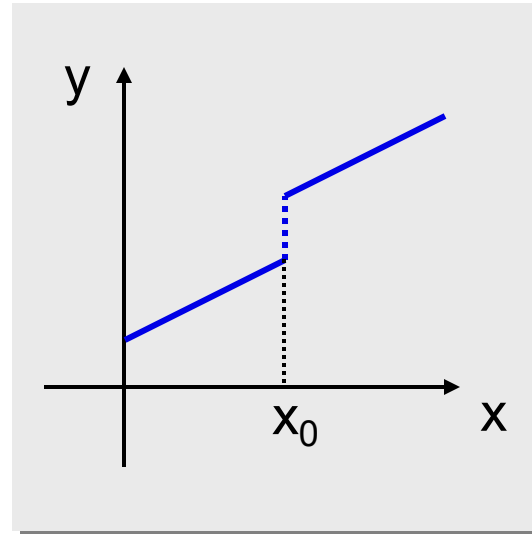
- Nullstellen: $f(x) \stackrel{!}{=} 0$
- Beschränktheit: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \neq \pm\infty$ und kein Pol existent
- Monotonie:
 - monoton wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in ID$
 - monoton fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in ID$

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Definitionslücken

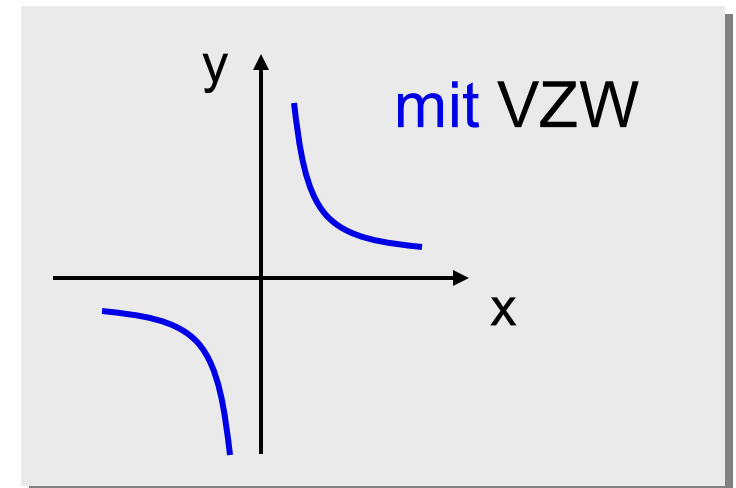
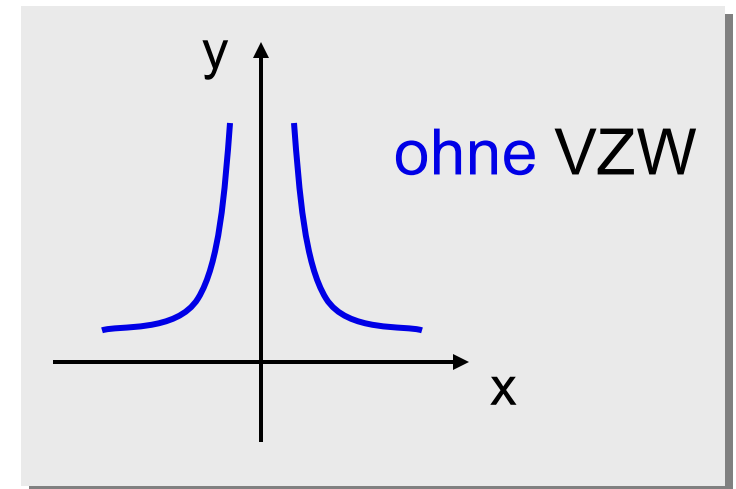
Lücke



Sprung



Pol (unendlicher Sprung)

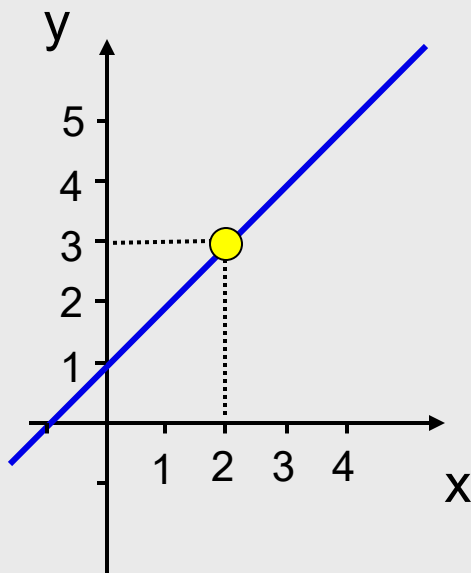


4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

➤ Beispiel für eine Definitionslücke in Form einer Lücke:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 1)}{x - 2}$$

Graph:



■ Die Funktion ist **stetig auf ihrem Definitionsbereich**.

■ **Betrachtung der Definitionslücke** $x_0 = 2$:

⇒ Der Funktionswert existiert nicht, da die Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert ist.

⇒ Aber der **Grenzwert** an der Stelle $x_0 = 2$ **existiert**:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{(x - 2) \cdot (x + 1)}{x - 2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x - 2) \cdot (x + 1)}{x - 2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \text{gleich}$$

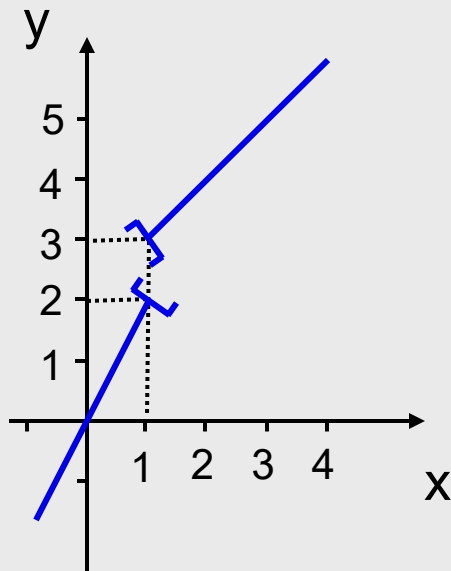
⇒ Die Funktion ist damit **stetig fortsetzbar** in $x_0 = 2$ durch die Funktion $g(x) = x + 1$.

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

➤ Beispiel für eine Definitionslücke in Form eines endlichen Sprunges:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{für } x \in]-\infty; 1[\\ 2 + x & \text{für } x \in]1; \infty[\end{cases}$$

Graph:



■ Die Funktion **stetig** auf ihrem Definitionsbereich.

■ **Betrachtung der Definitionslücke** $x_0 = 1$:

⇒ Der Funktionswert existiert nicht, da die Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert ist.

⇒ Der **Grenzwert existiert** ebenfalls **nicht**:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot x = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2 + x) = 2 + 1 = 3$$

} **ungleich**

⇒ Die Funktion ist damit **nicht stetig fortsetzbar**.

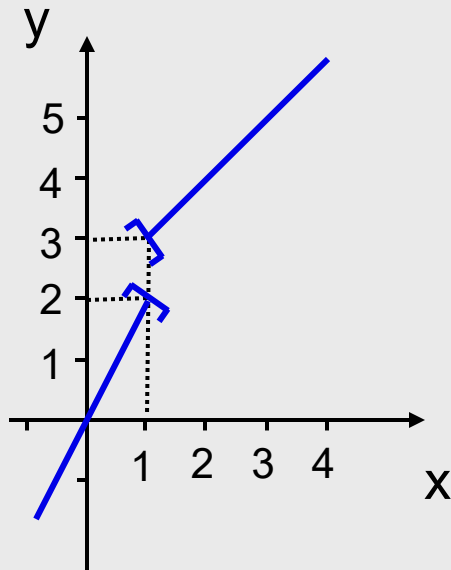
⇒ Der **Sprung** ist **endlich** (Abstand = $3 - 2 = 1$).

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

➤ Beispiel modifiziert zur Diskussion der Stetigkeit:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{für } x \in]-\infty; 1] \\ 2 + x & \text{für } x \in]1; \infty[\end{cases}$$

Graph:



■ Die Funktion $f(x)$ ist **nicht stetig**, da sie an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

■ Der Funktionswert existiert zwar, aber der Grenzwert existiert nicht:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot x = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2 + x) = 2 + 1 = 3$$

} **ungleich**

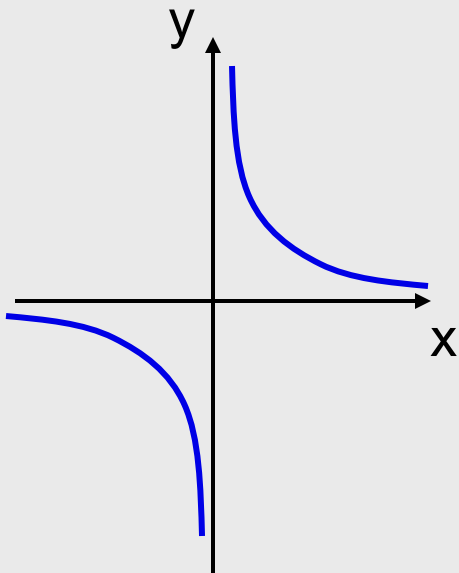
■ Der Sprung ist endlich (Abstand = $3 - 2 = 1$).

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

- Beispiel für eine Definitionslücke in Form eines unendlichen Sprunges, und zwar eines Pols mit Vorzeichenwechsel:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow y = f(x) = \frac{1}{x}$$

Graph:



- Die Funktion **stetig** auf ihrem Definitionsbereich.

- **Betrachtung der Definitionslücke** $x_0 = 0$:

⇒ Der Funktionswert existiert nicht, da die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist.

⇒ Der **Grenzwert existiert** ebenfalls **nicht**:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x < 0]{x \rightarrow 0} -\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} \infty$$

$$(\text{Exkurs: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0)$$

⇒ Damit ist die Funktion **nicht stetig fortsetzbar**.

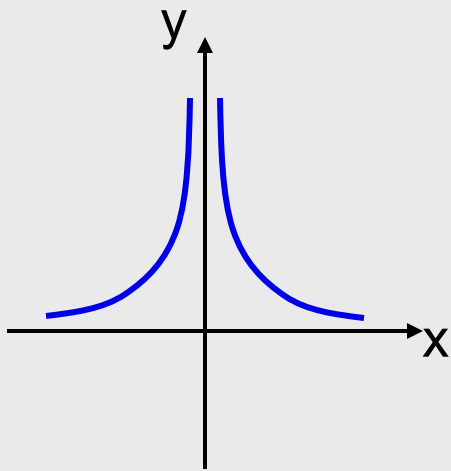
⇒ Der **Sprung** ist **unendlich** (Abstand nicht messbar).₂₀

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

- Beispiel für eine Definitionslücke in Form eines unendlichen Sprunges, und zwar eines Pols ohne Vorzeichenwechsel:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow y = f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Graph:



- Die Funktion **stetig** auf ihrem Definitionsbereich.
- **Betrachtung der Definitionslücke** $x_0 = 0$:
 - ⇒ Der Funktionswert existiert nicht, da die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist.
 - ⇒ Der **Grenzwert existiert** ebenfalls **nicht**:
$$\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x < 0]{x \rightarrow 0} \infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} \infty$$
 - ⇒ Damit ist die Funktion **nicht stetig fortsetzbar**.
 - ⇒ Der **Sprung** ist **unendlich** (Abstand nicht messbar).

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

- Bestimmung des Grenzwertes einer Funktion mit Hilfe von
 - Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen (siehe Kapitel 3) oder
 - allgemein gültigen „Brücken“ (siehe Kapitel 3) oder
 - Regel von de l'Hospital:
 - ⇒ Der Grenzwert des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen im Punkt x_0 (kann auch $\pm \infty$ sein) - beide Funktionen haben den Grenzwert Null (Typ „ $\frac{0}{0}$ “) oder beide Funktionen divergieren gegen $\pm \infty$ (Typ „ $\frac{\infty}{\infty}$ “), ist gleich dem Grenzwert des Quotienten der Ableitungen im Punkt x_0 , wenn dieser Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

➤ Beispiel für die Regel von l'Hospital:

$$\blacksquare \frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)} = 1$$

$$\blacksquare \frac{\infty}{\infty} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

➤ Konkretes Beispiel:

Rechts- und linksseitiger Grenzwert sind gleich;
Zähler und Nenner haben die gleiche Nullstelle;
es liegt eine Definitionslücke in Form einer Lücke vor:

■ Lösen, indem der Nenner „weggekürzt“ wird:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

■ alternativ lösen über l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot x - 1}{1} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

- Alternativ mit Hilfe von Nullfolgen den rechts- und linksseitigen Grenzwert getrennt ausrechnen:

⇒ Setze $x = 2 + \frac{1}{n}$ und $x = 2 - \frac{1}{n}$ mit $n \rightarrow \infty$

⇒ Für den **rechtsseitigen Grenzwert** ergibt sich dann bspw.:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{n}\right) - 2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} - 2 - \frac{1}{n} - 2}{2 + \frac{1}{n} - 2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{3}{1} = 3
 \end{aligned}$$

Gliederung

4 Funktionen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2 Der Begriff der Funktion

4.3 Die Darstellung von Funktionen

4.4 Mathematische Funktionstypen

4.4.1 Mathematische Funktionstypen

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften
mathematischer Funktionstypen

4.5 Ökonomische Anwendungen

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

4.5.2 Die Break-Even-Analyse

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

- Produktionsfunktion
- Kostenfunktion
- Preis-Absatz-Funktion und Nachfragefunktion
- Erlösfunktion
- Gewinnfunktion

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

➤ Produktionsfunktion $x = f(r)$ und Faktorverbrauchsfunktion $r = f^{-1}(x)$:

⇒ Ausbringungsmenge (x) als Funktion von der Faktoreinsatzmenge (r) oder umgekehrt

$$x = f(r) = 2 \cdot r^{0,5} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot x^2$$

➤ Kostenfunktion $K(x)$:

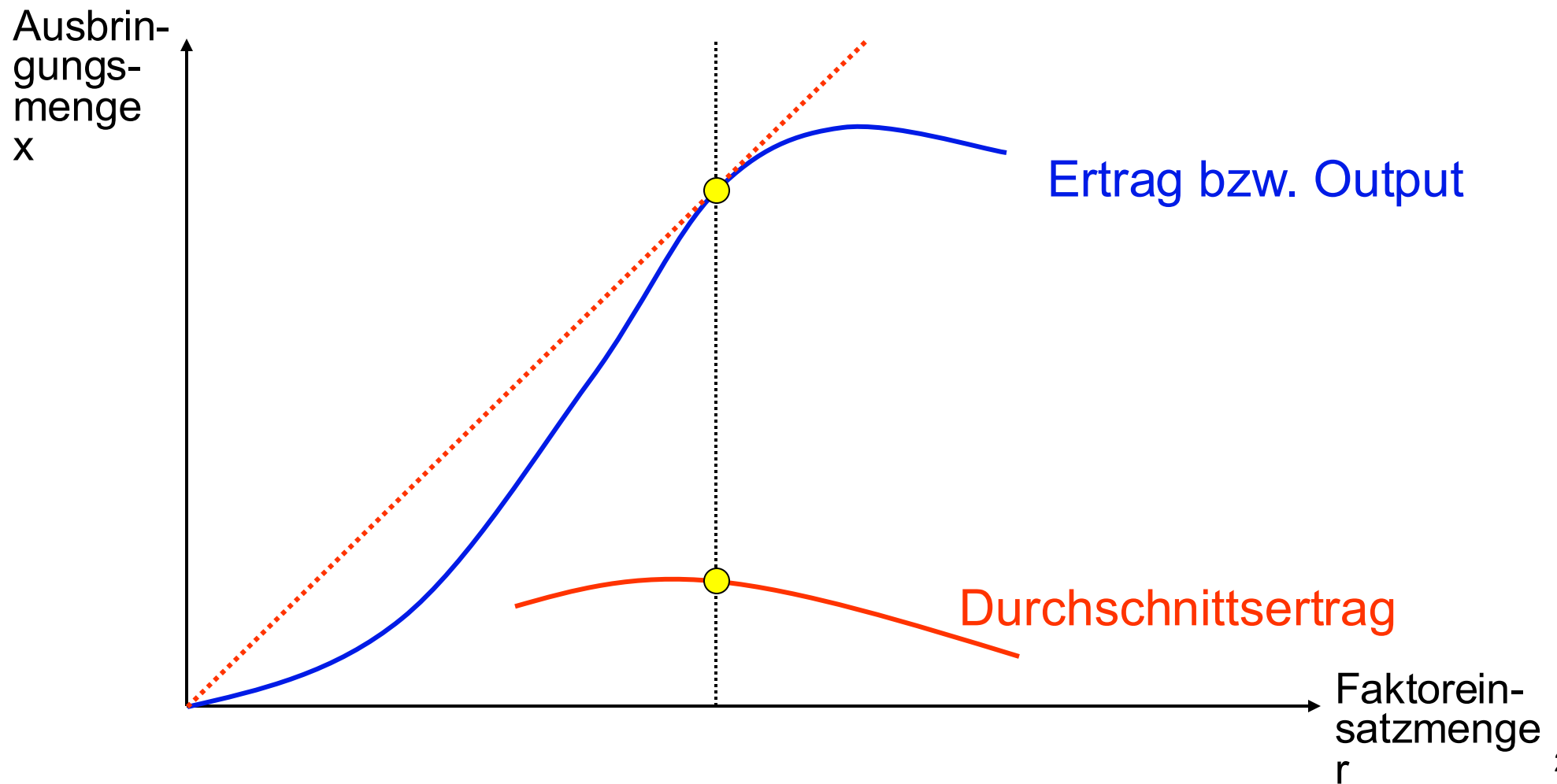
Kosten = variable Beschaffungskosten + fixe Kosten

= Faktorpreis · Faktormenge + fixe Kosten

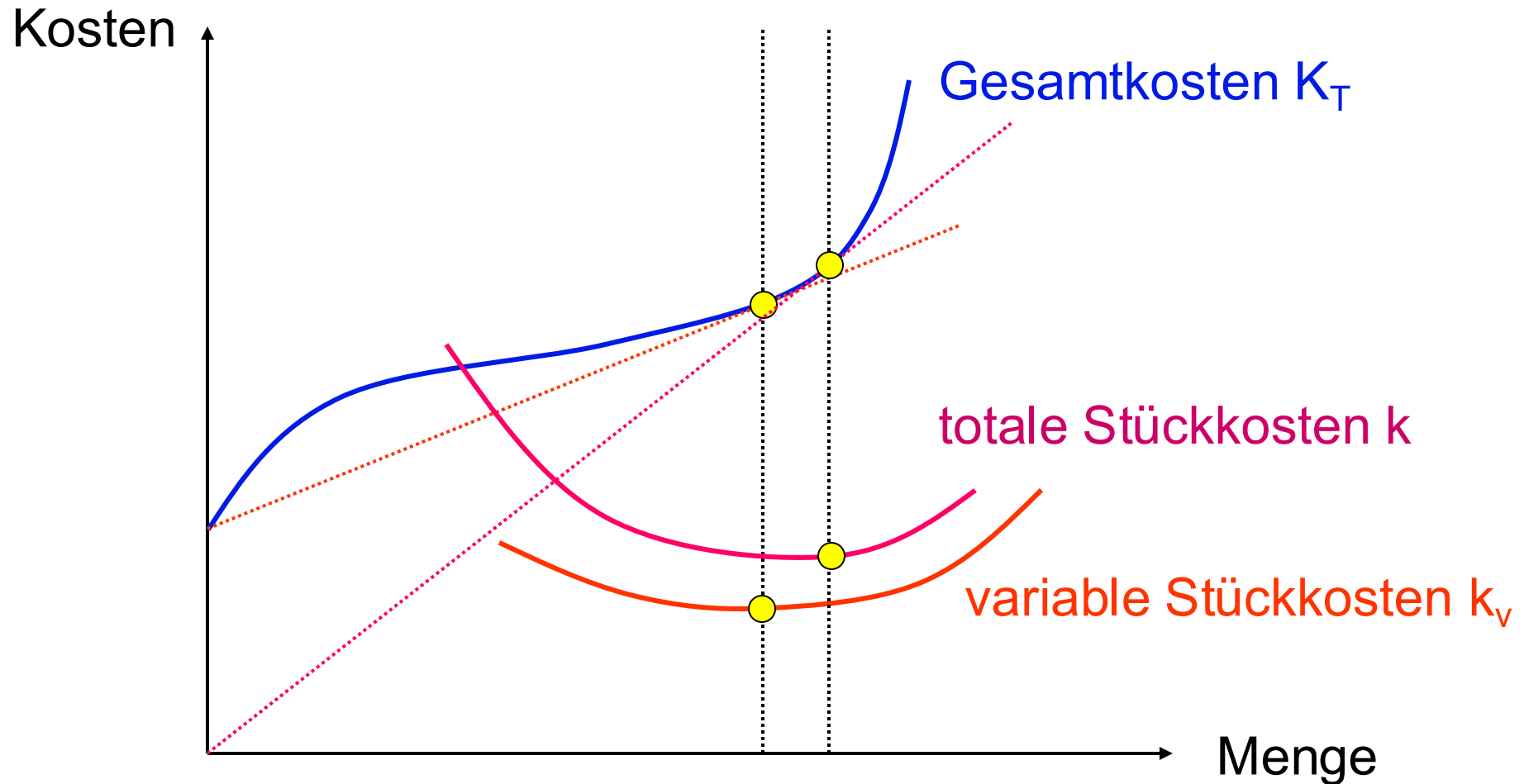
$$= 8 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x^2\right) + 190$$

$$= 2 \cdot x^2 + 190$$

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen: Produktionsfunktion vom Typ A (Ertragsgesetz)



4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen: Kostenfunktion beim Ertragsgesetz



4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

➤ Preis-Absatz-Funktion (PAF):

$$\text{Preis} = f(\text{Absatzmenge})$$

$$\Rightarrow p = 100 - 0,5 \cdot x$$

Nachfragefunktion (als Umkehrfunktion der PAF):

$$\text{Nachfragemenge} = f^{-1}(\text{Preis})$$

$$\Rightarrow x = 200 - 2 \cdot p$$

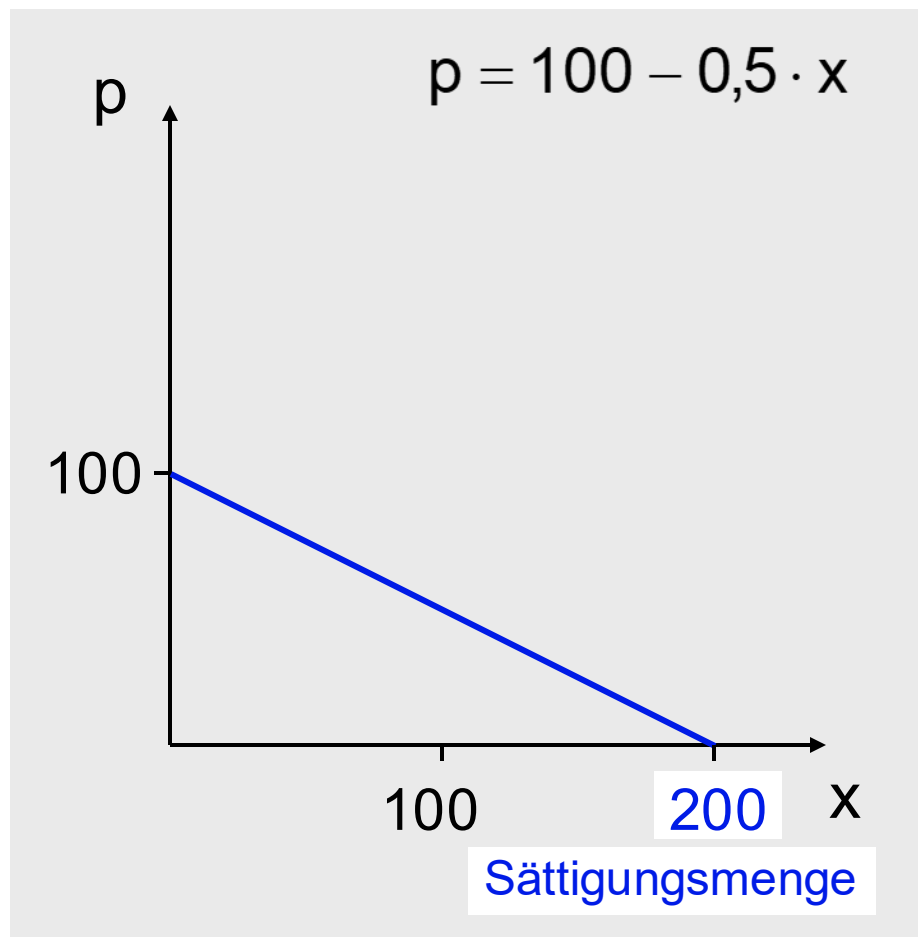
➤ Erlös-/Umsatzfunktion:

$$\text{Erlös} = \text{Preis} \cdot \text{Menge}$$

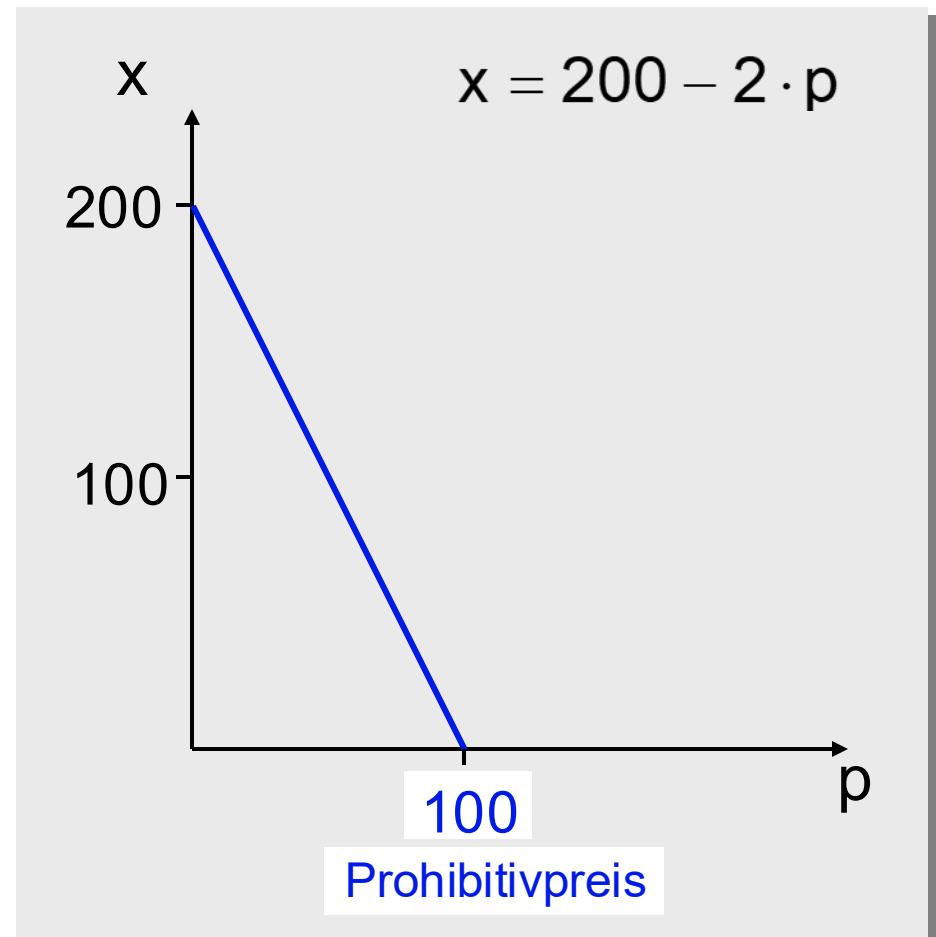
$$= (100 - 0,5 \cdot x) \cdot x = 100 \cdot x - 0,5 \cdot x^2$$

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen: Preis-Absatz-Funktion und Nachfragefunktion

Preis-Absatz-Funktion:



Nachfragefunktion:



4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

➤ Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned}\text{Gewinn} &= \text{Erlöse} - \text{Kosten} \\ &= (100 \cdot x - 0,5 \cdot x^2) - (2 \cdot x^2 + 190) \\ &= -2,5 \cdot x^2 + 100 \cdot x - 190\end{aligned}$$

4.5.2 Die Break-Even-Analyse

- **Fragestellung** der Break-Even-Analyse:
 - Wann ist der **Gewinn gleich null**?
 - Wann entspricht der **Umsatz genau den Kosten**?
- **Prämissen** der Break-Even-Analyse:
 - Ein-Produkt-Unternehmen
 - Produktionsmenge = Absatzmenge
 - Konstanz der Daten im Zeitablauf
(Preis, fixe Kosten, variable Kosten usw.)

4.5.2 Die Break-Even-Analyse

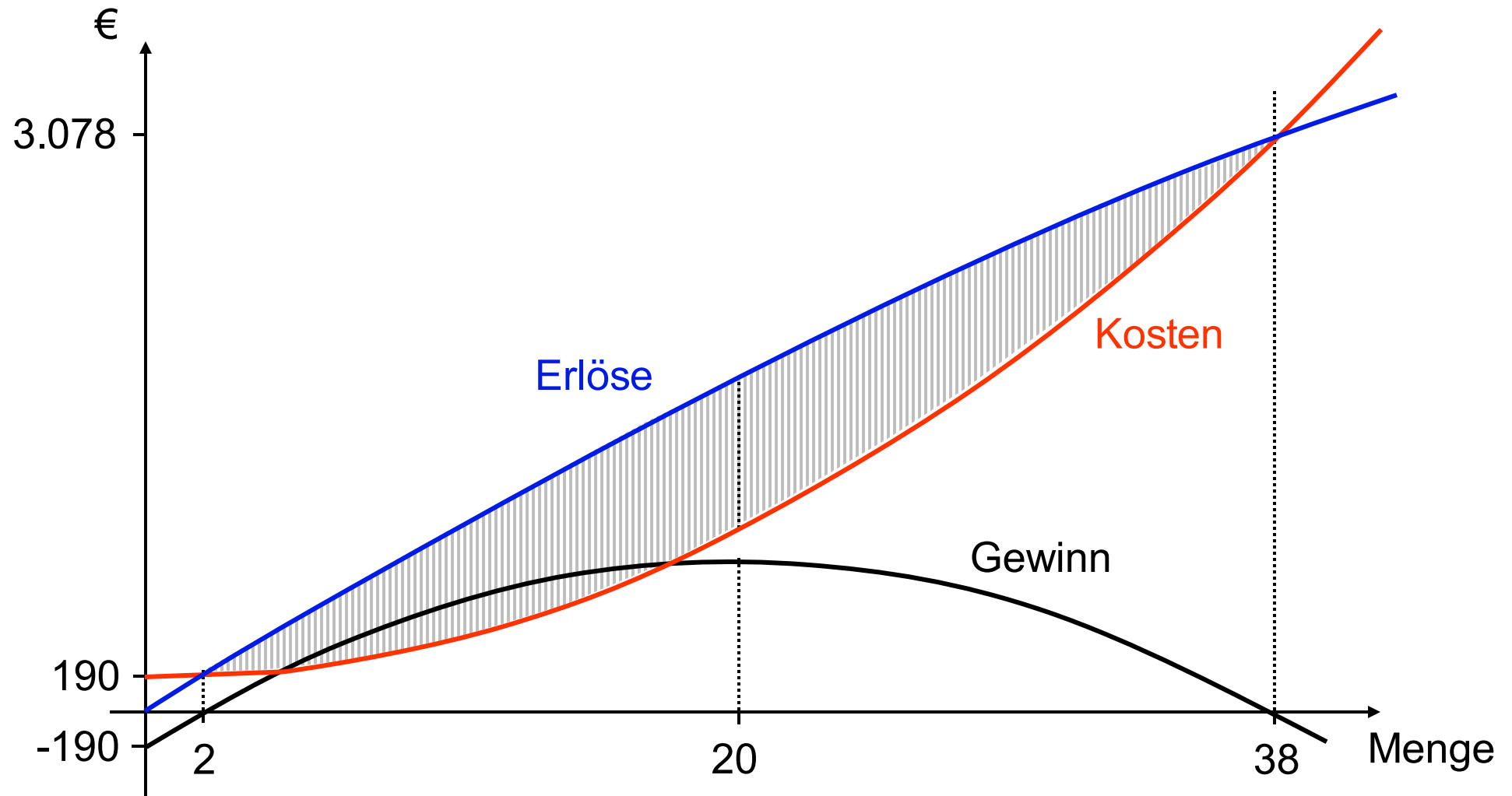
Im Beispiel:

$$\begin{aligned}\text{Gewinn} &= \text{Erlöse} - \text{Kosten} \stackrel{!}{=} 0 \\ &= -2,5 \cdot x^2 + 100 \cdot x - 190 = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 38 \text{ und } x_2 = 2 \\ \Rightarrow p_1 &= 81 = \text{PUG} \text{ und } p_2 = 99 = \text{POG}\end{aligned}$$

alternativ:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad & \text{Erlöse} \stackrel{!}{=} \text{Kosten} \\ \Leftrightarrow \quad & 100 \cdot x - 0,5 \cdot x^2 = 2 \cdot x^2 + 190\end{aligned}$$

4.5.2 Die Break-Even-Analyse



Jetzt folgt Kapitel 5:

Differentialrechnung I:

**Funktionen mit einer
unabhängigen Variablen**

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615