



Bachelor Betriebswirtschaft

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Michael Bucker

Prof. Dr. Michael Bucker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte**
- 4 Funktionen
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
- 6 Integralrechnung
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen



Kapitel 3:

Folgen, Reihen und Grenzwerte

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

3 Folgen, Reihen und Grenzwerte

3.1 Einführendes Beispiel

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

3.5 Konvergenz und Divergenz von Zahlenfolgen und Reihen

3.1 Einführendes Beispiel

- Ein Kapitalanleger legt **1.000 € für 5 Jahre** zu einem **Zinssatz von 10%** in Fonds an. Unter Berücksichtigung der **Zinseszinsen** beträgt sein Guthaben am Ende des ersten Jahres 1.100 €, am Ende des zweiten Jahres 1.210 €, am Ende des dritten Jahres 1.331 € usw.

Jahr n	0	1	2	3	4	5
Kontostand zum Jahresende [€]	1.000	1.100	1.210	1.331	1.464,1	1.610,51
Zinsen [€]		100	110	121	133,1	146,41
Zinsen kumuliert		100	210	331	464,1	610,51

3.1 Einführendes Beispiel

Die Kontostände zum jeweiligen Jahresende bilden eine (Zahlen)-Folge, ebenso die Zinsen:

(1.000, 1.100, 1.210, 1.331, 1.464,1, 1.610,51)

(100, 110, 121, 133,1,146,41)

Die kumulierten Zinsen bilden eine sogenannte (Zahlen)-Reihe, d. h. eine Folge von Teilsummen:

$(\underbrace{100}_{100}, \underbrace{100+110}_{210}, \underbrace{100+110+121}_{331}, \underbrace{100+110+121+133,1}_{464,1}, \dots)$

Gliederung

3 Folgen, Reihen und Grenzwerte

3.1 Einführendes Beispiel

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

3.5 Konvergenz und Divergenz von Zahlenfolgen und Reihen

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

- Unter einer **Folge reeller Zahlen** versteht man eine **Abbildung**

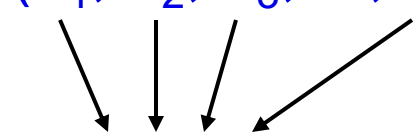
$$f: A \rightarrow B \quad \text{mit} \quad n \rightarrow f(n) \quad \text{und} \quad A \subset \mathbb{N} \quad \text{und} \quad B \subset \mathbb{R}$$

Jedem $n \in A$ ist ein $a_n := f(n) \in B$ zugeordnet.

Man schreibt hierfür $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ und nennt a_n das **n-te Glied** der Folge.

- Kurz:

$$\underbrace{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{Folge}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$$


Glieder der Folge

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

➤ Folge:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$$

➤ n-te Partialsumme:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

➤ (unendliche) Reihe:

= Folge der Partialsummen

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

➤ Alternierende Folge (Reihe):

Eine Folge (Reihe) heißt **alternierend**, wenn die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

z. B. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ mit $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ usw.

Konkrete Beispiele:

Bildungsgesetz:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, +1, \dots) \quad \text{mit } a_n =$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, +2, -3, +4, -5, \dots) \quad \text{mit } a_n =$$

Gliederung

3 Folgen, Reihen und Grenzwerte

3.1 Einführendes Beispiel

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

3.3 **Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen**

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

3.5 Konvergenz und Divergenz von Zahlenfolgen und Reihen

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Einführung: Der kleine Gauß

- Als neunjähriger Schüler erhielt Carl Friedrich Gauß folgende Aufgabe von seinem Mathematiklehrer:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100 = ?$$

- In Sekundenschnelle schrieb Gauß die Lösung an. Welche?
- Die Folge der Zahlen bilden eine arithmetische Folge:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$



3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Lösung: Der kleine Gauß

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100 = 5.050$$

$$100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 2 + 1 = 5.050$$

$$101 + 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 10.100$$

➤ Allgemeine Formel (Gauß'sche Summenformel):

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

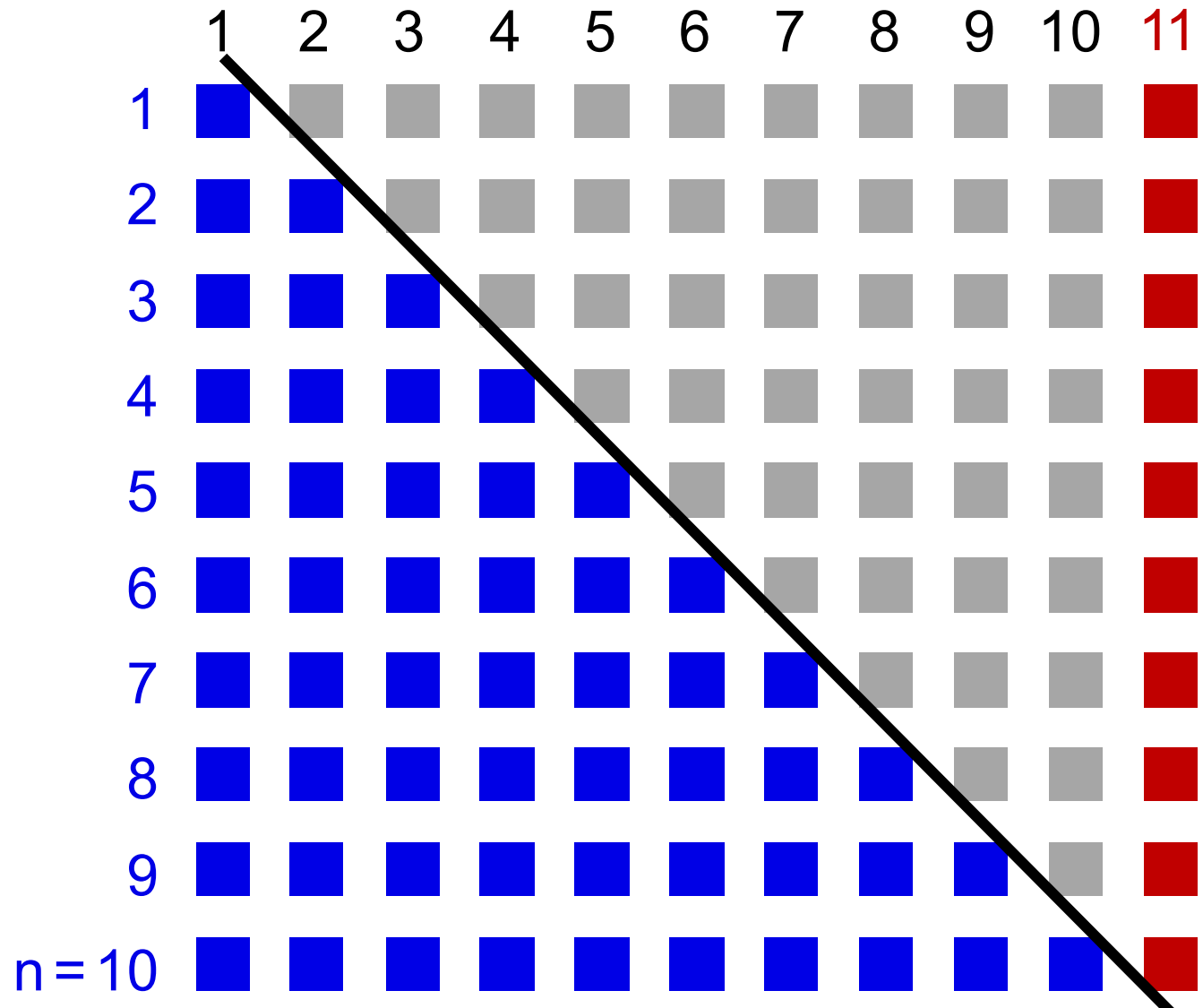
3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

- Geometrische Darstellung der Gauß'schen Summenformel:

$$1 + 2 + \dots + 10$$

$$= \frac{10 \cdot (10 + 1)}{2}$$

$$= 55 \text{ [Kästchen]}$$



3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Arithmetische Zahlenfolge:

Eine Zahlenfolge, bei der die Differenz zweier beliebiger benachbarter Glieder konstant ist, heißt arithmetische Folge.

$$:\Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_{n+1} - a_n = d)$$

➤ n-tes Glied einer arithmetischen Zahlenfolge:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

➤ n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe:

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

Beispiel für eine arithmetische Zahlenfolge:

$$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$$

$$\underbrace{\quad} a_1 \quad \underbrace{\quad} a_2 \quad \underbrace{\quad} a_3 \quad \underbrace{\quad} a_4 \quad \underbrace{\quad} a_5 \quad \underbrace{\quad} a_6$$

Es gilt: $a_1 = 1$

$$d = a_{n+1} - a_n = 2$$

Die einzelnen Glieder der Zahlenfolge berechnen sich wie folgt:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 = 3 = a_1 + 1 \cdot d$$

$$a_3 = 1 + 2 + 2 = 5 = a_1 + 2 \cdot d$$

$$a_4 = 1 + 2 + 2 + 2 = 7 = a_1 + 3 \cdot d$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = a_1 + (n-1) \cdot d$$

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

Beispiel für Bildung der n-ten Partialsummen (arithmetische Reihe):

⇒ Zugrunde liegt die arithmetische Zahlenfolge:

$$\begin{array}{cccccc}
 (& 1, & & 3, & & 5, & & 7, & & 9, & & 11, & \dots) \\
 & \underbrace{} & & \underbrace{} & & \underbrace{} & & \underbrace{} & & \underbrace{} & & \underbrace{} & \\
 & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & \\
 & a_1 & & a_1+d & & a_1+2d & & a_1+3d & & a_1+4d & & a_1+5d &
 \end{array}$$

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + (a_1 + d) = 2 \cdot a_1 + 1 \cdot d$$

$$s_3 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d) = 3 \cdot a_1 + 3 \cdot d$$

$$s_4 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d) + (a_1 + 3 \cdot d) = 4 \cdot a_1 + 6 \cdot d$$

$$s_n = \dots = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$$

Arithmetische Reihe: (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Herleitung der n-ten Partialsumme der arithmetischen Reihe:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (a_1 + (i-1) \cdot d)$$

$$= n \cdot a_1 + d \cdot \sum_{i=1}^n (i-1) =$$

$$= n \cdot a_1 + d \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen: Beispiel

- Ein Kapitalanleger legt **100 €** für volle **10 Jahre** zu einem **Zinssatz von 10%** in Fonds an. Unter Berücksichtigung der Zinsen **ohne Zinseszins** beträgt sein Guthaben nach einem Jahr 110 €, nach zwei Jahren 120 € usw.

	heute oder 0	nach 1	... 2	3	4	5	6	7	8	... Jahren 9	10
Jahr z. B. zum 31.12.	1 2024	2 2025	3 2026	4 2027	5 2028	6 2029	7 2030	8 2031	9 2032	10 2033	11 2034
Kontostand zum Jahresende ohne Zinsen [€]	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
jährliche Zinsen [€]		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Zinsen kumuliert [€]		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
gesamt (Kontostand zum Jahresende inkl. Zinsen) [€]	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen: Beispiel

Die Kontostände zum jeweiligen Jahresende, die Zinsen sowie die Kontostände gesamt bilden (arithmetische Zahlen-)Folgen:

$(100, 100, 100, 100, \dots)$ $(d=0)$

$(10, 10, 10, 10, \dots)$ $(d=0)$

$(100, 110, 120, 130, \dots)$ $(d=10)$

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen: Beispiel

- Für die Berechnung der Kontostände gesamt zum Jahresende ist $d=10$.

Der **Kontostand gesamt (also inkl. Zinsen)** **nach 10 Jahren** entspricht dem **11. Glied** dieser arithmetischen Zahlenfolge:

$$a_{11} = a_1 + (11-1) \cdot 10 = 100 + 10 \cdot 10 = 200$$

- Andere Formel zur Berechnung des Kapitals K_n **nach n Jahren** (**Verzinsung einer Einmalzahlung K_0 ohne Zinseszins**):

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot \text{Zinssatz} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Für das Beispiel (Zinssatz 10%, Einmalzahlung 100 €):

$$K_{10} = 100 + 100 \cdot 10\% \cdot 10 = 200$$

Gliederung

3 Folgen, Reihen und Grenzwerte

3.1 Einführendes Beispiel

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

3.5 Konvergenz und Divergenz von Zahlenfolgen und Reihen

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Geometrische Zahlenfolge:

Eine Zahlenfolge, bei der der Quotient zweier beliebiger benachbarter Glieder konstant ist, heißt geometrische Folge.

$$:\Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \right)$$

➤ n-tes Glied einer geometrischen Zahlenfolge:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

➤ n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe:

$$s_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{falls } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

Beispiel für eine geometrische Zahlenfolge:

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$$

$$\underbrace{\quad}_a \underbrace{\quad}_2 \underbrace{\quad}_4 \underbrace{\quad}_8 \underbrace{\quad}_{16} \underbrace{\quad}_{32}$$

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6$$

Es gilt: $a_1 = 1$ und $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Die einzelnen Glieder der Zahlenfolge berechnen sich wie folgt:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 \cdot 2 = 1 \cdot 2^1 = 2 = a_1 \cdot q^1$$

$$a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^2 = 4 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^3 = 8 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_n = \dots = 1 \cdot 2^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}$$

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

Beispiel für Bildung der n-ten Partialsummen (geometrische Reihe):

⇒ Zugrunde liegt die geometrische Zahlenfolge:

$$\begin{array}{cccccc}
 (1, & 2, & 4, & 8, & 16, & 32, \dots) \\
 \underbrace{}_{a_1} & \underbrace{}_{a_2} & \underbrace{}_{a_3} & \underbrace{}_{a_4} & \underbrace{}_{a_5} & \underbrace{}_{a_6} \\
 a_1 & a_1 \cdot q^1 & a_1 \cdot q^2 & a_1 \cdot q^3 & a_1 \cdot q^4 & a_1 \cdot q^5
 \end{array}$$

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + (a_1 \cdot q)$$

$$s_3 = a_1 + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2)$$

$$s_4 = a_1 + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + (a_1 \cdot q^3)$$

$$s_n = a_1 + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + (a_1 \cdot q^3) + \dots + (a_1 \cdot q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Geometrische Reihe: (1, 3, 7, 15, 31, 63, ...)

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Herleitung der n-ten Partialsumme der geometrischen Reihe:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_1 \cdot q^{i-1}$$

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen: Beispiel

- Ein Kapitalanleger legt **100 €** für volle **10 Jahre** zu einem **Zinssatz von 10%** in Fonds an. Unter Berücksichtigung der **Zinsen mit Zinseszins** beträgt sein Guthaben nach einem Jahr 110 €, nach zwei Jahren 121 € usw.

oder heute nach Jahren

0 **1** **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9** **10**

Jahr z. B. zum 31.12.	1 2024	2 2025	3 2026	4 2027	5 2028	6 2029	7 2030	8 2031	9 2032	10 2033	11 2034
Kontostand zum Jahresende inkl. Zinsen [€]	100	110	121	133	146	161	177	195	214	236	259
jährliche Zinsen [€]		10	11	12	13	15	16	18	19	22	23
Zinsen kumuliert [€]		10	21	33	46	61	77	95	114	136	159

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen: Beispiel

Die Kontostände zum jeweiligen Jahresende und die Zinsen bilden (geometrische Zahlen-)Folgen:

$(100, 110, 121, 133, \dots)$ $(q=1,1)$

$(10, 11, 12, 13, 15, \dots)$ $(q=1,1)$

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen: Beispiel

- Für die Berechnung der Kontostände gesamt zum Jahresende gilt $q=1,1$.

Der **Kontostand gesamt nach 10 Jahren** entspricht dem **11. Glied** dieser geometrischen Zahlenfolge:

$$a_{11} = a_1 \cdot 1,1^{11-1} = 100 \cdot 1,1^{10} \approx 259$$

- Andere Formel zur Berechnung des Kapitals K_n nach n Jahren (**Verzinsung einer Einmalzahlung K_0 mit Zinseszins**):

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \text{Zinssatz})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Für das Beispiel (Zinssatz 10%, $q = 1,1$, Einmalzahlung 100 €):

$$K_{10} = K_0 \cdot (1 + 0,1)^{10} = 100 \cdot 1,1^{10} \approx 259$$

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

- Weiteres Beispiel: Sparplan/(nachschüssige) Rentenrechnung: jährlich gleich bleibende Einzahlung a_1 am Jahresende, Verzinsung mit Zinseszins

Berechnung des Kapitals K nach n Jahren, $q = 1 + \text{Zinssatz}$:

$$\begin{aligned} K_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ &= a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \end{aligned}$$

Geometrische Reihe

Mit Anwendung der Formel für die n -te Partialsumme einer geometrischen Reihe kann man schneller rechnen:

$$K_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Gliederung

3 Folgen, Reihen und Grenzwerte

3.1 Einführendes Beispiel

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

3.5 Konvergenz und Divergenz von Zahlenfolgen und Reihen

3.5.1 Der Begriff der Konvergenz und Divergenz

3.5.2 Grenzwertsätze

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

3.5.1 Der Begriff der Konvergenz und Divergenz

- Gibt es zu einer Folge (a_n) eine reelle Zahl a so, dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_ε so finden lässt, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon$$

gilt, so heißt a Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) , und man nennt die **Zahlenfolge konvergent mit dem Grenzwert a** .

Man schreibt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

- **Mathematisch:**

$$(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_\varepsilon) (|a_n - a| < \varepsilon)$$

3.5.1 Der Begriff der Konvergenz und Divergenz

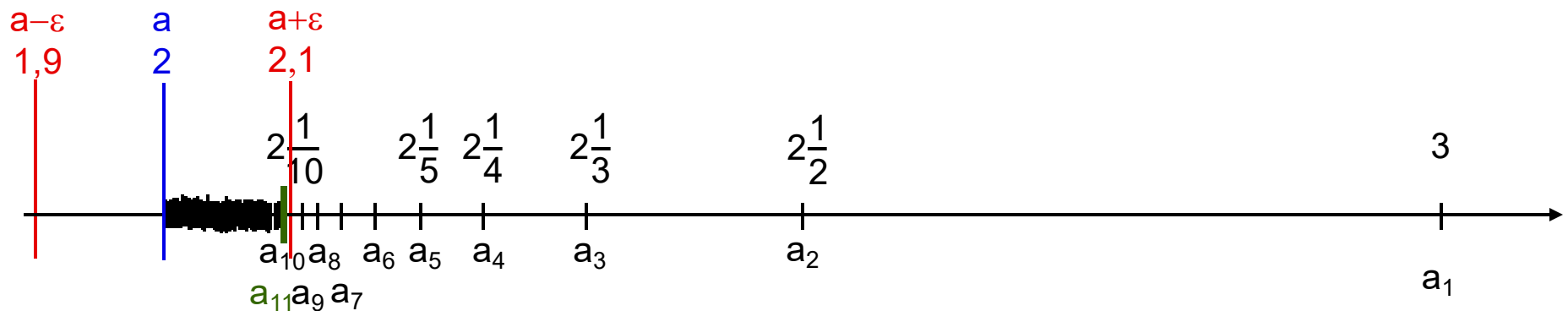
- Ein Beispiel für eine konvergente Zahlenfolge:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(2 + \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

In diesem Beispiel bedeutet (für alle noch so kleinen ε)

$$(\exists a \in \mathbb{R}) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq n_\varepsilon) \quad (|a_n - a| < \varepsilon)$$

z. B. für $\varepsilon = 0,1$: $(\forall n \geq 11) \quad (|a_n - 2| < 0,1)$



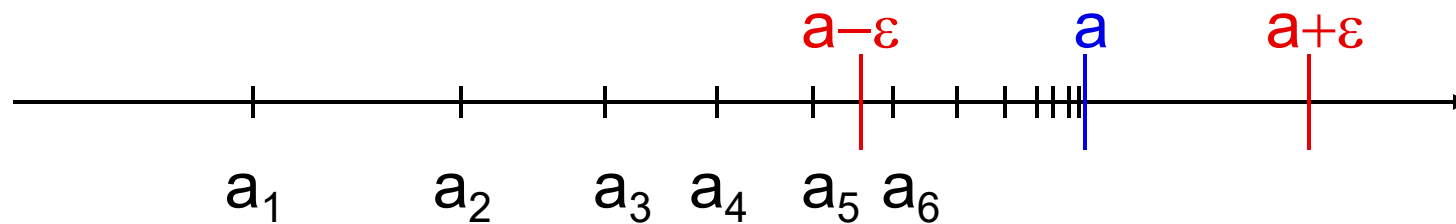
3.5.1 Der Begriff der Konvergenz und Divergenz

Konvergent: Folge $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ Konstante
(genau ein Häufungspunkt)

Divergent: Folge $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ $\pm \infty$ oder gegen
mehr als einen Häufungspunkt

➤ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt

➤ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent



3.5.2 Grenzwertsätze

➤ Es sei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

➤ Dann gilt:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = a \cdot b$$

4. Es sei zusätzlich $b \neq 0$.
Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

3.5.2 Grenzwertsätze

➤ Beispiele: $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \right)$

$$\text{zu 1.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^{\frac{1}{n}} \pm \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 \pm 0 = 1$$

$$\text{zu 2.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{n}} \right) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{zu 3.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\text{zu 4.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{3^{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}}} = \frac{0}{1} = 0$$

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

- **Bestimmung des Grenzwertes** einer konvergenten Folge oder Reihe mit Hilfe von:
 - **Grenzwertsätzen** (siehe vorherige Seite)
 - oder
 - allgemein gültigen „**Brücken**“ (siehe nächste Seite)
 - oder
 - **Regel von l'Hospital** (unter bestimmten Bedingungen, siehe Kapitel 4)

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

„Brücke“

„höchste Potenz
im **Zähler**“

$$a_n = \frac{1 - n^2}{3 + 2n}$$

→ $\pm \infty$

„höchste Potenz
im **Nenner**“

$$a_n = \frac{5n}{1 - 2n^2}$$

→ 0

„höchste Potenz
sowohl im **Zähler** als
auch im **Nenner**“

$$a_n = \frac{3n - 2}{1 - 2n}$$

→ Koeffizient
(hier -3/2)

Koeffizienten =
Zahlen vor den
Unbekannten

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

➤ Die drei Beispiele ausführlich:

 → 0

$$\frac{1-n^2}{3+2n} = \frac{n \cdot \left(\frac{1}{n} - n\right)}{n \cdot \left(\frac{3}{n} + 2\right)} = \frac{\frac{1}{n} - n}{\frac{3}{n} + 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\frac{5n}{1-2n^2} = \frac{n^2 \cdot \frac{5}{n}}{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - 2\right)} = \frac{\frac{5}{n} - 2}{\frac{1}{n^2} - 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0}{-2} = 0$$

$$\frac{3n-2}{1-2n} = \frac{n \cdot \left(3 - \frac{2}{n}\right)}{n \cdot \left(\frac{1}{n} - 2\right)} = \frac{3 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n} - 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

- Grenzwert der geometrischen Reihe für $n \rightarrow \infty$
und $|q| < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

- Exkurs: Eulersche Zahl e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818...$$

Jetzt folgt Kapitel 4:

Funktionen

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615