



Bachelor Betriebswirtschaft

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Prof. Dr. Michael Bucker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra**
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte
- 4 Funktionen
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
- 6 Integralrechnung
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen



Kapitel 2:

Lineare Algebra

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 2 Lineare Gleichungen und Ungleichungen
 - 2.1 Einführendes Beispiel
 - 2.2 Matrizenrechnung
 - 2.3 Lineare Gleichungssysteme
 - 2.4 Determinanten
 - 2.5 Einführung in die lineare Optimierung

2.1 Einführendes Beispiel

➤ Beispiel: Lineare Gleichungen

Auf den Maschinen M_1 und M_2 stellt ein Betrieb die Produkte P_1 und P_2 her. Zur Herstellung einer Mengeneinheit (ME) des Produktes 1 werden 1 Zeiteinheit (ZE) auf Maschine 1 und 3 ZE auf Maschine 2 benötigt, zur Herstellung einer ME des Produktes 2 werden 4 ZE auf Maschine 1 und 2 ZE auf Maschine 2 benötigt.

Die **maximale Kapazität** der Maschine 1 beträgt 60 ZE, die der Maschine 2 ist 80 ZE.

Bestimmen Sie dasjenige **Fertigungsprogramm** x_1, x_2 (x_i sei die Anzahl der herzustellenden Mengeneinheiten des Produktes P_i), bei dem **sämtliche Maschinen voll ausgelastet** sind!

2.1 Einführendes Beispiel

- **Lineares Gleichungssystem** (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten):

$$\text{Maschine 1: } 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 60$$

$$\text{Maschine 2: } 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 80$$

- **Lösung:** $x_1 = 20$, $x_2 = 10$

- **„Matrizenschreibweise“** des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix}$$

2.2 Matrizenrechnung

2.2.1 Grundlagen der Matrizenrechnung

2.2.1.1 Der Begriff der Matrix

2.2.1.2 Hauptdiagonale und Nebendiagonale

2.2.1.3 Spaltenvektor und Zeilenvektor
als Sonderfälle von Matrizen

2.2.1.4 Transponierte einer Matrix

2.2.1.5 Spezielle Matrizen:
Quadratische Matrix, Symmetrische Matrix,
Diagonalmatrix, Einheitsmatrix, Dreiecksmatrix

2.2.2 Rechenoperationen mit Matrizen

2.2.1.1 Der Begriff der Matrix

➤ Matrix:

⇒ Eine rechteckige Anordnung reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten heißt **(mxn)-Matrix** (*sprich: m Kreuz n Matrix*).
Häufig verwendet man das Symbol A oder andere **Großbuchstaben**.

z. B.:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oder allgemein :} \quad A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

⇒ a_{ij} heißt das in der **i-ten Zeile** und **j-ten Spalte** stehende **Element** dieser Matrix.

2.2.1.1 Der Begriff der Matrix

➤ Allgemein formuliert man:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

➤ Sind alle Elemente a_{ij} der Matrix gleich null ($a_{ij} = 0$), dann handelt es sich um eine **Nullmatrix**. Man schreibt: $0_{m \times n}$

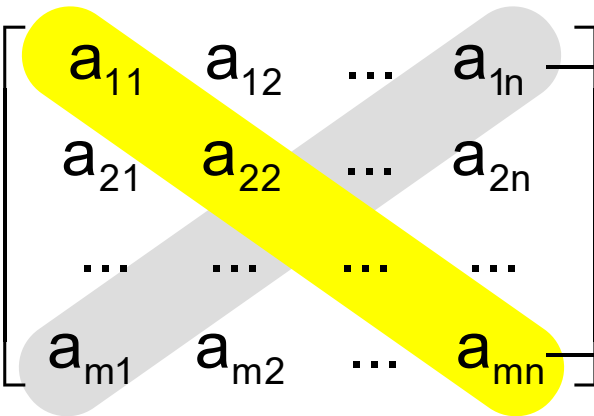
2.2.1.2 Hauptdiagonale und Nebendiagonale

➤ Diagonalen einer Matrix:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nebendiagonale

Hauptdiagonale



2.2.1.3 Sonderfälle von Matrizen

- Eine $(m \times 1)$ -Matrix heißt **Spaltenvektor**.

$$\text{z.B.} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Eine $(1 \times n)$ -Matrix nennt man **Zeilenvektor**

$$\text{z.B.} \quad \mathbf{b} = (3 \quad 2 \quad 6)$$

2.2.1.4 Transponierte einer Matrix

➤ Transposition:

- Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Matrix, so erhält man die **transponierte Matrix**.
- Aus einer Matrix $A_{m \times n}$ mit den Elementen a_{ij} erhält man durch Transponieren eine neue Matrix $B_{n \times m}$ mit $b_{ji} = a_{ij}$.
- Die zu $A_{m \times n}$ transponierte Matrix heißt: $A_{m \times n}^T = B_{n \times m}$
- Es gilt: $(A^T)^T = A$
- z. B.:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{2 \times 3}^T = B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.2.1.5 Spezielle Matrizen

➤ Quadratische Matrix:

- Gilt $m = n$ (Zeilenzahl = Spaltenzahl), dann handelt es sich um eine quadratische Matrix, z.B. $A_{3 \times 3}$ oder $B_{2 \times 2}$ etc.
- Man spricht auch von einer n -reihigen Matrix.

➤ Symmetrische Matrix:

- Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, wenn für alle i, j gilt: $a_{ij} = a_{ji}$

➤ Diagonalmatrix:

- Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn für alle i, j mit $i \neq j$ gilt: $a_{ij} = 0$

2.2.1.5 Spezielle Matrizen

➤ Einheitsmatrix:

- Eine Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix, wobei für alle $i = j$ gilt: $a_{ij} = 1$
- Die Einheitsmatrix wird mit dem Buchstaben E bezeichnet: $E_{n \times n}$

$$E_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Man spricht auch von einer n -reihigen Einheitsmatrix, ihre Spaltenvektoren heißen **kanonische Einheitsvektoren** des $\mathbb{R}^n$.

2.2.1.5 Spezielle Matrizen

➤ Dreiecksmatrix:

- Eine quadratische Matrix, deren sämtliche Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen gleich Null sind, heißt obere (untere) Dreiecksmatrix.

Obere Dreiecksmatrix:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i > j$$

z.B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i < j$$

z.B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2 Matrizenrechnung

2.2.1 Grundlagen der Matrizenrechnung

2.2.2 Rechenoperationen mit Matrizen

2.2.2.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

2.2.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und
deren inhaltliche Interpretation

2.2.2.4 Die Inverse einer quadratischen Matrix
und ihre Eigenschaften

2.2.2.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

➤ Addition und Subtraktion von Matrizen:

- Es können nur Matrizen miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert werden, die die **gleiche Anzahl von Zeilen** und die **gleiche Anzahl von Spalten** aufweisen.
- Jedes Element von A wird mit dem korrespondierendem Element von B addiert. Die Subtraktion erfolgt analog.
- z.B.

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2.2.2.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

➤ Weitere **Rechenregeln** für die Matrizenaddition

1. Kommutativgesetz:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = B_{m \times n} + A_{m \times n}$$

2. Assoziativgesetz:

$$(A_{m \times n} + B_{m \times n}) + C_{m \times n} = A_{m \times n} + (B_{m \times n} + C_{m \times n})$$

3. Transposition:

$$(A_{m \times n} + B_{m \times n})^T = A_{m \times n}^T + B_{m \times n}^T$$

2.2.2.2 Multiplikation von Matrizen mit einem Skalarfaktor

➤ Vorgehensweise bei der
Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor
(d.h. Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl) :

■ Jedes Element der Matrix wird mit dem Skalarfaktor
multipliziert.

■ z.B.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2.2.2 Multiplikation von Matrizen mit einem Skalarfaktor

➤ **Rechenregeln** für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor (λ_1, λ_2 : Skalarfaktoren)

$$1. \quad 0 \cdot A_{m \times n} = 0_{m \times n}$$

$$2. \quad (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot A_{m \times n} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot A_{m \times n})$$

$$3. \quad \lambda \cdot (A_{m \times n} + B_{m \times n}) = \lambda \cdot A_{m \times n} + \lambda \cdot B_{m \times n}$$

$$4. \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A_{m \times n} = \lambda_1 \cdot A_{m \times n} + \lambda_2 \cdot A_{m \times n}$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ **Formale Vorgehensweise** zur Matrizenmultiplikation:

Jede Zeile von A wird mit jeder Spalte von B multipliziert:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}}^{c_{11}} & \overbrace{a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}}^{c_{12}} \\ \underbrace{a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}}_{c_{21}} & \underbrace{a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}}_{c_{22}} \end{bmatrix}$$

Voraussetzung ist somit, dass eine Zeile der Matrix A genauso viele Elemente besitzt wie eine Spalte der Matrix B.

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Falsches Schema zur Matrizenmultiplikation:

$$C_{3 \times 2} = A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$$

=

Matrix A

1	3	2
0	1	2
1	1	1

Matrix B

1	1
1	2
3	1

Matrix C

10	9
7	4
5	4

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ **Beispiel** für die Multiplikation von Matrizen:

⇒ Eine Matrix $A_{3 \times 2}$ soll mit einer Matrix $B_{2 \times 4}$ multipliziert werden. Voraussetzung ist wiederum, dass die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt (im Beispiel = 2). Es entsteht eine neue Matrix $C_{3 \times 4}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 & 12 & 12 \\ 7 & 12 & 14 & 10 \\ 7 & 11 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ *Beachte:*

- Das **Kommutativgesetz** gilt hier **NICHT!**
Das bedeutet:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ **Rechenregeln** für die Matrizenmultiplikation:

1. $E_{m \times m} \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n} = A_{m \times n} \cdot E_{n \times n}$
2. $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times q} = A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times q})$
3. $A_{m \times n} \cdot (B_{n \times r} + C_{n \times r}) = A_{m \times n} \cdot B_{n \times r} + A_{m \times n} \cdot C_{n \times r}$
 $(A_{m \times n} + B_{m \times n}) \cdot C_{n \times r} = A_{m \times n} \cdot C_{n \times r} + B_{m \times n} \cdot C_{n \times r}$
4. $\lambda \cdot (A_{m \times n} \cdot B_{n \times r}) = (\lambda \cdot A_{m \times n}) \cdot B_{n \times r} = A_{m \times n} \cdot (\lambda \cdot B_{n \times r})$
5. $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times r})^T = B_{n \times r}^T \cdot A_{m \times n}^T$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Beispiel für Rechenregel 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Zweites Beispiel für Rechenregel 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

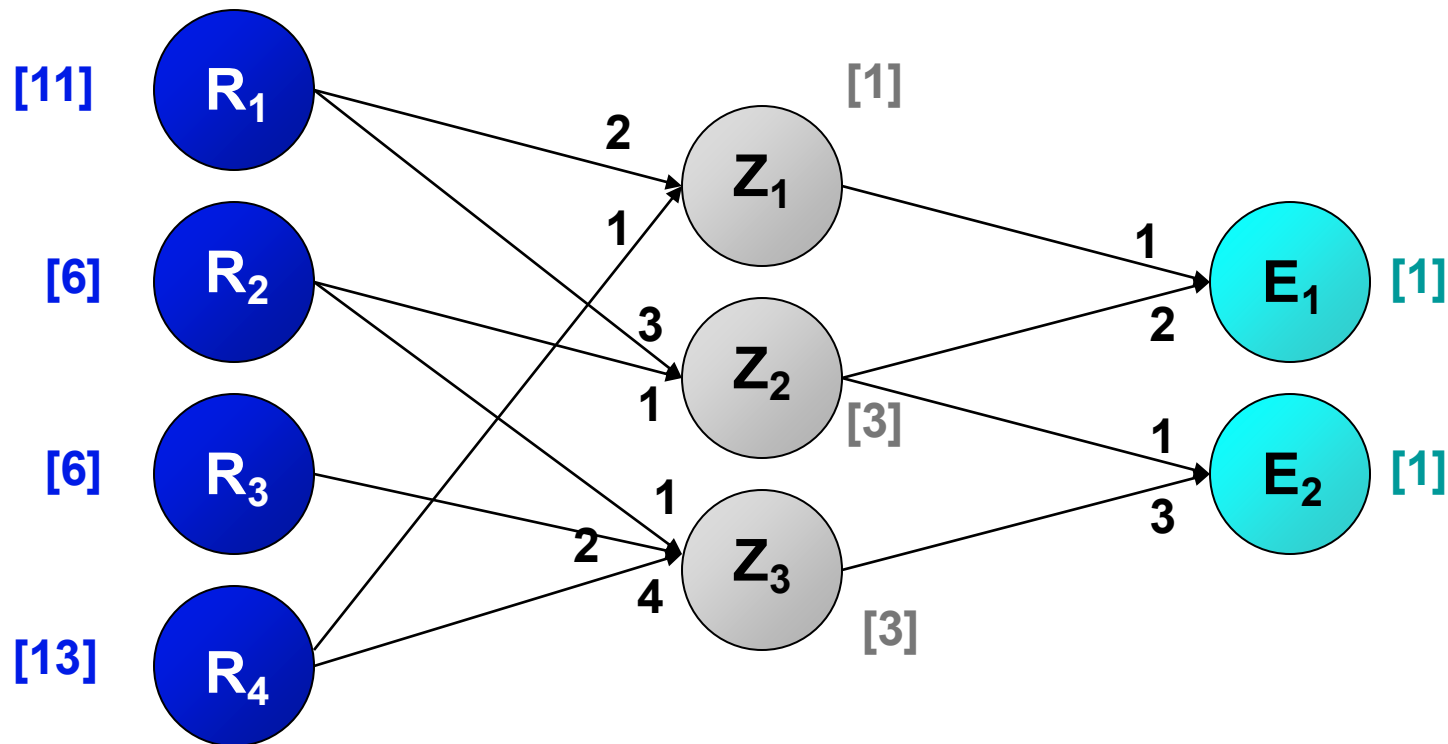
➤ Beispiel und inhaltliche Interpretation:

Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Enderzeugnisse E_1 und E_2 aus drei Zwischenprodukten Z_1 , Z_2 und Z_3 . Die Zwischenprodukte werden wiederum aus vier Rohstoffen R_1 , R_2 , R_3 und R_4 hergestellt.

Der nachfolgende Gozinto-Graph (Vazsonyi) verdeutlicht den zweistufigen Fertigungsprozess. Die Zahlen an den Pfeilen geben die Produktionskoeffizienten an, also die Einheiten eines Rohstoffes (bzw. eines Zwischenproduktes), die zur Herstellung eines Zwischenproduktes (bzw. Enderzeugnisses) benötigt werden.

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Beispiel und inhaltliche Interpretation: Gozinto-Graph



2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Beispiel und inhaltliche Interpretation: Produktionsmatrizen

Matrix A	Z ₁	Z ₂	Z ₃
R ₁	2	3	0
R ₂	0	1	1
R ₃	0	0	2
R ₄	1	0	4

Matrix B	E ₁	E ₂
Z ₁	1	0
Z ₂	2	1
Z ₃	0	3

Matrix C	E ₁	E ₂
R ₁	8	3
R ₂	2	4
R ₃	0	6
R ₄	1	12

$$A \cdot B = C$$

Anmerkung:

Sind in Matrix A oder B Zeilen und Spalten vertauscht, so muss die entsprechende Matrix zunächst transponiert werden!

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

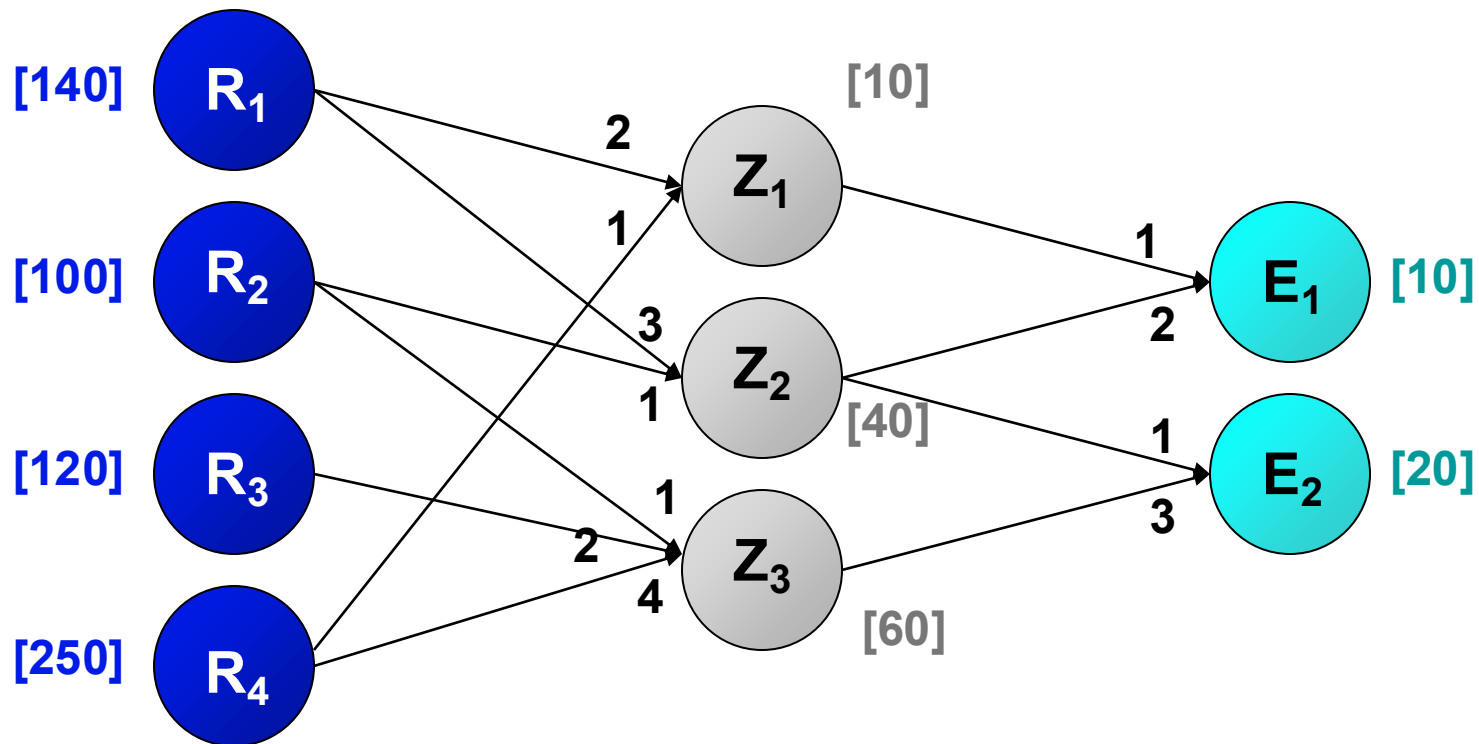
➤ Beispiel und inhaltliche Interpretation:

⇒ Wie viele Rohstoffe R_1 , R_2 , R_3 und R_4 werden benötigt, um jeweils eine Einheit der Enderzeugnisse E_1 und E_2 herzustellen?

$$C \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{von } R_1 \\ \text{von } R_2 \\ \text{von } R_3 \\ \text{von } R_4 \end{array}$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Beispiel und inhaltliche Interpretation: Gozinto-Graph



2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Beispiel und inhaltliche Interpretation:

⇒ Wie viele Rohstoffe R_1 , R_2 , R_3 und R_4 werden benötigt, um 10 Einheiten von E_1 und 20 Einheiten von E_2 herzustellen?

$$C \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 100 \\ 120 \\ 250 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{von } R_1 \\ \text{von } R_2 \\ \text{von } R_3 \\ \text{von } R_4 \end{array}$$

2.2.2.4 Die Inverse einer Matrix und ihre Eigenschaften

- Inverse Elemente bei der Multiplikation von Zahlen:

$$3 \cdot 3^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

- Für die zur Matrix A inverse Matrix A^{-1} gilt (ähnlich wie oben):

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = E$$

- Die Division von Matrizen ist nicht definiert:

$$\frac{A}{B} \quad \text{ist nicht definiert !}$$

2.2.2.4 Die Inverse einer Matrix und ihre Eigenschaften

➤ *Beachte:*

- Die inverse Matrix ist nur für quadratische Matrizen definiert!
- Nicht jede quadratische Matrix hat eine Inverse.

Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat keine Inverse.

- Sind zwei Matrizen A und B zueinander invers, so lässt sich dieser Sachverhalt durch Multiplikation der beiden Matrizen überprüfen:

$$A \cdot B = E$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2.4 Die Inverse einer Matrix und ihre Eigenschaften

➤ Rechenregeln:

$$1. \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2. \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$3. \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$4. \quad (c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } c \neq 0$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme

- 2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems
- 2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
- 2.3.3 Aufstellung und Lösung linearer Gleichungssysteme dargestellt an einem einfachen Beispiel mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen
- 2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren
- 2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix
- 2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion
- 2.3.7 Anwendungsbeispiele

2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems

- Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Lösungsvariablen $x_1, \dots, x_n$:

$$(1) \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$(2) \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

...

$$(m) \quad a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

mit $(\forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}) (a_{ij} \in \mathbb{R} \wedge b_i \in \mathbb{R})$

- **Kennzeichen:**

⇒ Alle Lösungsvariablen (= **Unbekannten**) treten nur in der ersten Potenz auf.

⇒ Alle Lösungsvariablen (= **Unbekannten**) sind nur additiv verknüpft.

- Die (konstanten) Zahlen $a_{11}, \dots, a_{mn}$ heißen **Koeffizienten**, die Zahlen $b_1, \dots, b_m$ heißen **rechte Seiten** des Gleichungssystems.

2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems

- Zwei Aufgaben im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen in der ökonomischen Praxis:
 - Aufstellen eines linearen Gleichungssystems aus einem ökonomischen Sachverhalt heraus
 - Lösung des aufgestellten linearen Gleichungssystems mittels eines bestimmten Algorithmus

2.3 Lineare Gleichungssysteme

2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems

2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

2.3.2.1 Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

2.3.2.2 Widersprüche in einem linearen Gleichungssystem

2.3.2.3 Lineare Abhängigkeit von Gleichungen

2.3.3 Aufstellung und Lösung dargestellt an einem Beispiel

2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren

2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix

2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion

2.3.7 Anwendungsbeispiele

2.3.2.1 Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

➤ Lineares Gleichungssystem:

$$(1) \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$(2) \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

...

$$(m) \quad a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

⇒ Das Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn für alle b_i gilt:
 $b_i = 0$ mit $i = 1, 2, \dots, m$.

⇒ Ist ein b_i ungleich null, so spricht man von einem **inhomogenen** Gleichungssystem.

2.3.2.2 Widersprüche in einem linearen Gleichungssystem

- Das inhomogene lineare Gleichungssystem darf **keinen Widerspruch** enthalten.

Das nachfolgende Gleichungssystem besitzt einen Widerspruch:

$$(1) \quad 2 \cdot x_1 + x_2 = 4$$

$$(2) \quad 2 \cdot x_1 + x_2 = 7$$

2.3.2.3 Lineare Abhängigkeit von Gleichungen

- Soll das inhomogene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar sein, muss die **Zahl der linear unabhängigen Gleichungen gleich der Zahl der Lösungsvariablen** sein!
- Das folgende Gleichungssystem ist linear abhängig:
(3) ergibt sich als Summe aus (1) und (2),
also als sogenannte Linearkombination aus (1) und (2)!

$$(1) \quad x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 10$$

$$(2) \quad 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 20$$

$$(3) \quad 3 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

2.3.2.3 Lineare Abhängigkeit von Gleichungen

➤ Linear unabhängige Vektoren:

- Die m Zeilenvektoren a_i (mit $i = 1, \dots, m$) heißen linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur als triviale Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, m$$

- Die n Spaltenvektoren a_j (mit $j = 1, \dots, n$) heißen linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur als triviale Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \vec{a}_j = \vec{0} \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, n$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme

- 2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems
- 2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit
- 2.3.3 Aufstellung und Lösung dargestellt an einem einfachen Beispiel mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen
 - 2.3.3.1 Das Beispiel
 - 2.3.3.2 Graphische Lösung des Beispiels
 - 2.3.3.3 Rechnerische Lösung des Beispiels
- 2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren
- 2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix
- 2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion
- 2.3.7 Anwendungsbeispiele

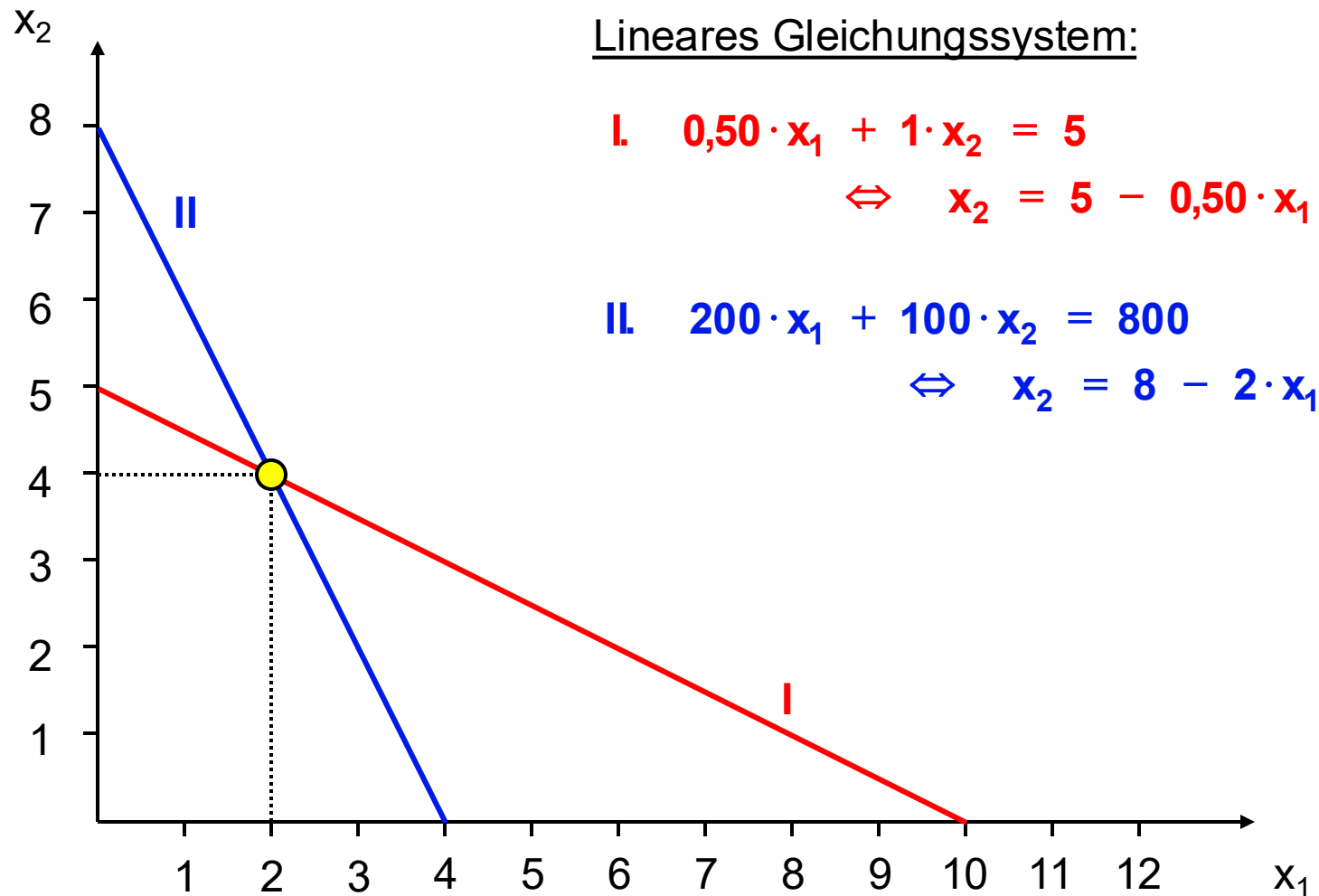
2.3.3.1 Das Beispiel

- Ein Student möchte seinen Konsum an Schokoriegeln und süßen Kaltgetränken bestimmen. Ein Schokoriegel kostet 0,50 € und ein Kaltgetränk 1,00 €. Ein Schokoriegel enthält 200 Kalorien, ein Kaltgetränk hingegen nur 100 Kalorien. Der Student hat ausgerechnet, dass er während der Vorlesungszeit pro Tag seinem Körper maximal 800 Kalorien über Kaltgetränke und Schokoriegeln zuführen darf. Der Student hat ein tägliches Budget von 5 €.

Wie viele Schokoriegel und wie viele Kaltgetränke darf der Student am Automaten ziehen?

- *Symbole:*
 x_1 : Anzahl Schokoriegel
 x_2 : Anzahl Kaltgetränke

2.3.3.2 Graphische Lösung des Beispiels



2.3.3.3 Rechnerische Lösung des Beispiels

Lösungsverfahren für „einfache“ lineare Gleichungssysteme

Gleichsetzungsverfahren

I. und II. gleichsetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x_2 = 5 - 0,50 \cdot x_1 \\ \text{II.} & x_2 = 8 - 2 \cdot x_1 \\ \Rightarrow & 5 - 0,50 \cdot x_1 = 8 - 2 \cdot x_1 \end{array}$$

Einsetzungsverfahren

z.B. I. in II. einsetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x_2 = 5 - 0,50 \cdot x_1 \\ \text{II.} & 2 \cdot x_1 + x_2 = 8 \\ \Rightarrow & 2 \cdot x_1 + (5 - 0,50 \cdot x_1) = 8 \end{array}$$

Additionsverfahren

z.B. I. von II. subtrahieren:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 0,50 \cdot x_1 + x_2 = 5 \\ \text{II.} & 2 \cdot x_1 + x_2 = 8 \\ \Rightarrow & 1,50 \cdot x_1 = 3 \end{array}$$

2.3.3.3 Rechnerische Lösung des Beispiels

➤ *Exkurs:*

Allgemeine rechnerische Lösung für den einfachen Fall
(Einsetzungsverfahren):

$$\begin{aligned} \text{I. } a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 \end{aligned}$$

$$\text{II. } a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

2.3.3.3 Rechnerische Lösung des Beispiels

$$\text{I. in II.} \quad a_{21} \cdot \left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 \right) + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

$$\frac{a_{21} \cdot b_1}{a_{11}} + \left(a_{22} - \frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}} \right) \cdot x_2 = b_2$$

$$\frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

2.3.3.3 Rechnerische Lösung des Beispiels

$$\begin{aligned}\text{in I. } x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 \\ &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}} \\ &= \frac{b_1 \cdot a_{22} \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{12} \cdot b_2 + a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_1}{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{11} - a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{12}} \\ &= \frac{b_1 \cdot a_{22} \cdot a_{11} - a_{11} \cdot a_{12} \cdot b_2}{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{11} - a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{12}}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme

- 2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems
- 2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit
- 2.3.3 Aufstellung und Lösung dargestellt an einem Beispiel
- 2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren
 - 2.3.4.1 Koeffizientenmatrix und erweiterte Matrix
 - 2.3.4.2 Elementare Zeilentransformationen
 - 2.3.4.3 Gauß-Algorithmus
 - 2.3.4.4 Vollständiges Eliminationsverfahren
- 2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix
- 2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion
- 2.3.7 Anwendungsbeispiele

2.3.4.1 Koeffizientenmatrix und erweiterte Matrix in der Matrizen Schreibweise

➤ Matrizendarstellung:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$$

2.3.4.1 Koeffizientenmatrix und erweiterte Matrix in der Matrizenschreibweise

➤ **Matrizendarstellung:**

$$\left[A \mid \mathbf{b} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Koeffizientenmatrix

$\underbrace{\hspace{15em}}$
erweiterte Matrix

2.3.4.2 Elementare Zeilentransformationen an der erweiterten Matrix

- Elementare Zeilenumformungen:
 - Zeilentausch
 - Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl
 - Addition des λ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Die Menge der Lösungen bleibt bei Anwendung elementarer Zeilenumformungen stets erhalten!

2.3.4.3 Gauß-Algorithmus

➤ Gauß-Algorithmus

- Umformen der Matrix zu einer oberen Dreiecksmatrix
- Anschließend Rückübersetzung

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & & \\ 0 & a_{22} & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{array} \right]$$

2.3.4.4 Vollständiges Eliminationsverfahren

➤ Vollständiges Eliminationsverfahren (Gauß-Jordan-Verfahren)

- Umformen der Matrix, so dass links eine Einheitsmatrix stehen bleibt
- Die Lösung kann jetzt direkt abgelesen werden. Eine Rückübersetzung ist nicht erforderlich!

$$\left[A \mid \mathbf{b} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2.3.4.5 Beispiel

➤ Lineares Gleichungssystem aus Abschnitt 2.3.3:

$$\text{I. } 0,50 \cdot x_1 + x_2 = 5$$

$$\text{II. } 2 \cdot x_1 + x_2 = 8$$

➤ Matrizen Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2.3.4.5 Beispiel

$$\begin{array}{ll}
 \text{I} & \left[\begin{array}{cc|c} 0,5 & 1 & 5 \end{array} \right] \\
 \text{II} & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \end{array} \right] \\
 \text{I}^I = 2 \cdot \text{I} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \end{array} \right] \\
 \text{II}^I = \text{II} & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \end{array} \right] \\
 \text{I}^{II} = \text{I}^I & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \end{array} \right] \\
 \text{II}^{II} = 2 \cdot \text{I}^I - \text{II}^I & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 12 \end{array} \right] \\
 \text{I}^{III} = \text{I}^{II} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \end{array} \right] \\
 \text{II}^{III} = \text{II}^{II} : 3 & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \\
 \text{I}^{IV} = \text{I}^{III} - 2 \cdot \text{II}^{III} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\
 \text{II}^{IV} = \text{II}^{III} & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 4 \end{array} \right]
 \end{array}$$

⇐ **Gauß-Algorithmus:**
jetzt Rückübersetzung
(siehe nächste Folie)

⇐ **Vollständige Elimination:**
Lösung direkt ablesbar

2.3.4.5 Beispiel

Rückübersetzung beim Gauß-Algorithmus:

$$\text{II}^{\text{II}} : 3 \cdot x_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4$$

$$\text{In I}^{\text{II}} : 1 \cdot x_1 + 2 \cdot 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme

- 2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems
- 2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
- 2.3.3 Aufstellung und Lösung linearer Gleichungssysteme dargestellt an einem einfachen Beispiel mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen
- 2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren
- 2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix
- 2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion
- 2.3.7 Anwendungsbeispiele

2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix

- Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann
- unlösbar, wenn $\text{rang } A < \text{rang } [A \mid \mathbf{b}]$
 - lösbar, wenn $\text{rang } A = \text{rang } [A \mid \mathbf{b}]$
 - ◆ eindeutig lösbar, wenn $\text{rang } A = \text{rang } [A \mid \mathbf{b}] = n$
 - ◆ universell lösbar, wenn $\text{rang } A = \text{rang } [A \mid \mathbf{b}] < n$
Dann sind $d = n - \text{rang } A$ Parameter frei wählbar.

mit

n = Anzahl der Variablen

Rang = Anzahl der im System enthaltenen unabhängigen Zeilenvektoren („Anzahl der Kanten“)

(Anm.: Berechnung des Rangs mittels Gauß-Verfahren möglich)

2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix

- Beispiel für ein **eindeutig lösbares** Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \text{rang } A = \text{rang } [A | \mathbf{b}] = 3 = n$$

- Beispiel für ein **unlösbares** Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{rang } A = 2 \\ \text{rang } [A | \mathbf{b}] = 3 = n \end{array}$$

- Beispiel für ein **universell lösbares** Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad \text{rang } A = \text{rang } [A | \mathbf{b}] = 2 < 3 = n$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme

- 2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems
- 2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit
- 2.3.3 Aufstellung und Lösung dargestellt an einem Beispiel
- 2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren
- 2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix
- 2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion
 - 2.3.6.1 Matrixinversion mit Hilfe des vollständigen Eliminationsverfahrens
 - 2.3.6.2 Nutzung der Matrixinversion für Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten
 - 2.3.6.3 Matrixinversion mittels Microsoft EXCEL
- 2.3.7 Anwendungsbeispiele

2.3.6.1 Matrixinversion mit Hilfe des vollständigen Eliminationsverfahrens

- Zusammenhang zwischen regulärer Matrix A und der Inversen A^{-1} (reguläre Matrix: quadr. Matrix mit $\det \neq 0$)

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

- Berechnung des Lösungsvektors $\mathbf{x}$ eines linearen Gleichungssystems über Zeilentransformationen an der erweiterten Matrix (vollständiges Eliminationsverfahren):

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \text{erweiterte Matrix } \left[A \mid \mathbf{b} \right]$$

- Berechnung der Inversen gleichermaßen mit Hilfe des vollständigen Eliminationsverfahrens:

$$A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \text{"erweiterte Matrix"} \left[A \mid E \right]$$

2.3.6.1 Matrixinversion mit Hilfe des vollständigen Eliminationsverfahrens

➤ *Beispiel:*

Berechne die Inverse der Matrix A mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{I} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \text{II} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0,5 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \text{I}^I = \text{I} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \text{II}^I = \text{II} - \text{I} & \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0,5 & -1 & 1 \end{array} \right] \\
 \text{I}^{II} = \text{I}^I & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \text{II}^{II} = 2 \cdot \text{II}^I & \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right]
 \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

➤ *Probe:*

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.6.2 Nutzung der Matrixinversion für Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten

- Allgemeine Form des linearen Gleichungssystems:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Lösung mit Hilfe der Matrixinversion:

⇒ Multipliziere beide Seiten (von links!) mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

⇒ *Beachte:*

Da das Kommutativgesetz bei der Matrizenmultiplikation nicht gilt, muss auf beiden Seiten der Gleichung „von links“ multipliziert werden!

2.3.6.2 Nutzung der Matrixinversion für Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten

- Beispiel aus Kapitel 2.3.3:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Berechnung der Inversen: siehe nächste Folie
- Berechnung des Lösungsvektors $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\text{bzw. } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/3 \\ 12/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.3.6.2 Nutzung der Matrixinversion für Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten

➤ Berechnung der Inversen:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 0,5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I}^I = 2 \cdot \text{I} \\ \text{II}^I = 4 \cdot \text{I} - \text{II} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I}^{II} = \text{I}^I \\ \text{II}^{II} = \text{II}^I : 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I}^{III} = \text{I}^{II} - 2 \cdot \text{II}^{II} \\ \text{II}^{III} = \text{II}^{II} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 \end{array} \right]$$

2.3.6.2 Nutzung der Matrixinversion für Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten

➤ Vorteile der Berechnung des Lösungsvektors mit Hilfe der Inversen:

⇒ Die Vorgehensweise ist immer dann sinnvoll, wenn der Lösungsvektor x für alternative rechte Seiten berechnet werden soll.

➤ Beispiel:

⇒ Der Student hat jetzt ein tägliches Budget von 3,50 € (statt bisher von 5 €) zur Verfügung. Wie viele Schokoriegel und Kaltgetränke darf er in diesem Fall pro Tag verzehren?

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/3 \\ 6/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

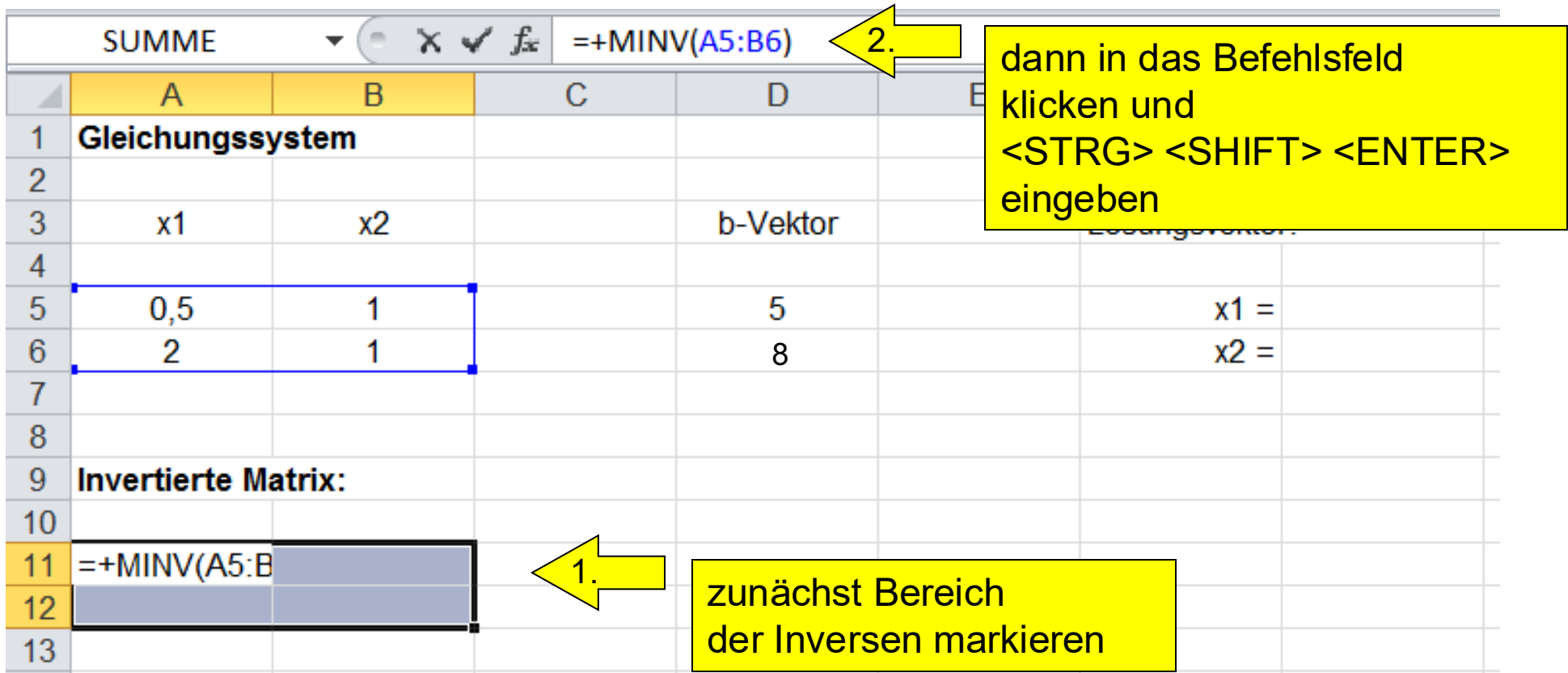
2.3.6.3 Matrixinversion mittels Microsoft EXCEL

SUMME		+MINV(A5:B6)			
	A	B	C	D	E
1	Gleichungssystem				
2					
3	x1	x2		b-Vektor	Lösungsvektor:
4					
5	0,5	1		5	x1 =
6	2	1		8	x2 =
7					
8					
9	Invertierte Matrix:				
10					
11	+MINV(A5:B6)				
12					
13					

Formel für die
Matrixinversion eingeben:
+MINV(Bereich)

2.3.6.3 Matrixinversion mittels Microsoft EXCEL

Sollte das Ergebnis nicht direkt erscheinen (z. B. bei alten Excel-Versionen), dann:



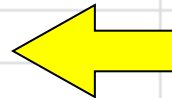
SUMME  **=+MINV(A5:B6)** **2.** dann in das Befehlsfeld klicken und <STRG> <SHIFT> <ENTER> eingeben

	A	B	C	D	E
1	Gleichungssystem				
2					
3	x1	x2		b-Vektor	
4					
5	0,5	1		5	x1 =
6	2	1		8	x2 =
7					
8					
9	Invertierte Matrix:				
10					
11	=+MINV(A5:B				
12					
13					

1. zunächst Bereich der Inversen markieren

2.3.6.3 Matrixinversion mittels Microsoft EXCEL

H24 fx							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Gleichungssystem						
2							
3	x1	x2		b-Vektor		Lösungsvektor:	
4							
5	0,5	1		5		x1 =	
6	2	1		8		x2 =	
7							
8							
9	Invertierte Matrix:						
10							
11	-0,66666667	0,66666667					
12	1,33333333	-0,33333333					
13							



das gewünschte Ergebnis

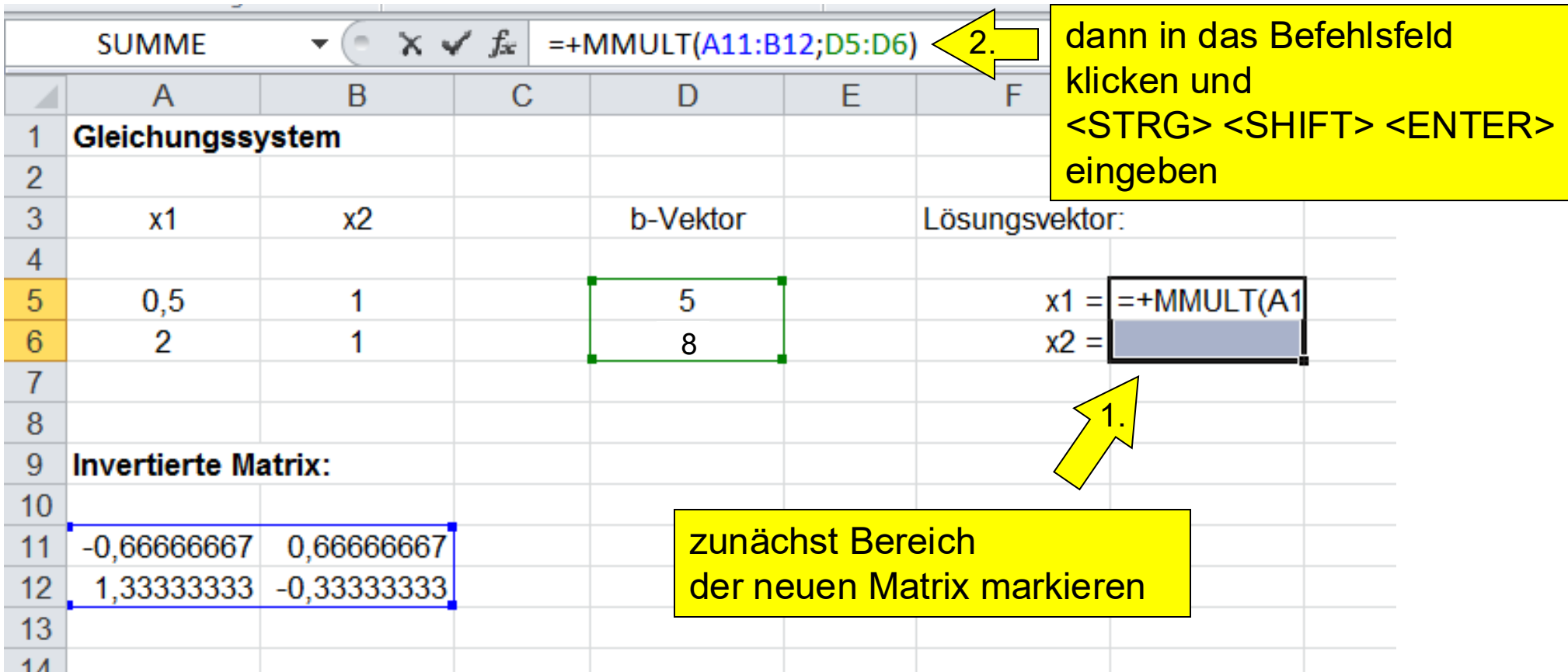
2.3.6.3 Matrixinversion mittels Microsoft EXCEL

SUMME ✕ ✓ <i>f_x</i> +MMULT(A11:B12;D5:D6)						
	A	B	C	D	E	F
1	Gleichungssystem					
2						
3	x1	x2		b-Vektor		Lösungsvektor.
4						
5	0,5	1		5		x1 = +MMULT(A11:B12;D5:D6)
6	2	1		8		x2 =
7						
8						
9	Invertierte Matrix:					
10						
11	-0,66666667	0,66666667				
12	1,33333333	-0,33333333				
13						
14						

Formel für die Matrizenmultiplikation eingeben:
+MMULT(Bereich Matrix A;
Bereich Matrix B)

2.3.6.3 Matrixinversion mittels Microsoft EXCEL

Sollte das Ergebnis nicht direkt erscheinen (z. B. bei alten Excel-Versionen), dann wieder:



Excel Formula Bar: `=+MMULT(A11:B12;D5:D6)`

2. dann in das Befehlsfeld klicken und **<STRG> <SHIFT> <ENTER>** eingeben

	A	B	C	D	E	F
1	Gleichungssystem					
2						
3	x1	x2		b-Vektor		Lösungsvektor:
4						
5	0,5	1		5		x1 =
6	2	1		8		x2 =
7						
8						
9	Invertierte Matrix:					
10						
11	-0,66666667	0,66666667				
12	1,33333333	-0,33333333				
13						
14						

1. zunächst Bereich der neuen Matrix markieren

2.3.6.3 Matrixinversion mittels Microsoft EXCEL

J28 fx								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Gleichungssystem							
2								
3	x1	x2		b-Vektor		Lösungsvektor:		
4								
5	0,5	1		5		x1 =	2	
6	2	1		8		x2 =	4	
7								
8								
9	Invertierte Matrix:							
10								
11	-0,66666667	0,66666667						
12	1,33333333	-0,33333333						
13								
14								



das gewünschte Ergebnis

2.3 Lineare Gleichungssysteme

- 2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems
- 2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
- 2.3.3 Aufstellung und Lösung linearer Gleichungssysteme dargestellt an einem einfachen Beispiel mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen
- 2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren
- 2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix
- 2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion
- 2.3.7 Anwendungsbeispiele

2.3.7 Anwendungsbeispiele

➤ Ökonomische Zusammenhänge:

$$G = E - K$$

$$E = p \cdot x$$

$$K = K_{\text{var}} + K_{\text{fix}} = k_{\text{var}} \cdot x + K_{\text{fix}}$$

mit	G	:=	Gewinn
	E	:=	Erlöse
	K	:=	Kosten
	p	:=	Preis
	x	:=	Menge
	K_{var}	:=	variable Kosten (abhängig von der Menge)
	K_{fix}	:=	fixe Kosten (unabhängig von der Menge)
	k_{var}	:=	variable Stückkosten

2.3.7 Anwendungsbeispiele

- Auf den Maschinen M_1 , M_2 und M_3 stellt ein Betrieb die Produkte P_1 , P_2 und P_3 her. Die nachfolgende Tabelle zeigt die **Produktionskoeffizienten** der drei Produkte, also die zur Erstellung jeweils einer Mengeneinheit (ME) eines Produktes benötigten Maschinenzeiten (ZE). Die **maximale Kapazität** der Maschine 1 beträgt 140 ZE, die der Maschine 2 ist 320 ZE, und die verfügbare Kapazität der Maschine 3 beläuft sich auf 420 ZE.

Bestimmen Sie dasjenige **Fertigungsprogramm** x_1 , x_2 , x_3 (x_i sei die Anzahl der herzustellenden Mengeneinheiten des Produktes P_i), bei dem **sämtliche Maschinen voll ausgelastet** sind! Stellen Sie dazu das Lineare Gleichungssystem in Matrizenform auf! Wie lautet der Lösungsvektor?

2.3.7 Anwendungsbeispiele

	Produktionskoeffizient [ZE/ME]		
	P_1	P_2	P_3
M_1	1	4	2
M_2	3	2	6
M_3	2	6	8

2.3.7 Anwendungsbeispiele

- Lineares Gleichungssystem in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 320 \\ 420 \end{bmatrix}$$

- Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe des **Gauß-Algorithmus** (elementare Zeilenumformungen bis zur oberen Dreiecksmatrix)

2.3.7 Anwendungsbeispiele

$$\begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3)
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 4 & 2 & 140 \\
 3 & 2 & 6 & 320 \\
 2 & 6 & 8 & 420
 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
 (1)' = (1) \\
 (2)' = -3 \cdot (1) + (2) \\
 (3)' = -2 \cdot (1) + (3)
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 4 & 2 & 140 \\
 0 & -10 & 0 & -100 \\
 0 & -2 & 4 & 140
 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
 (1)'' = (1) \\
 (2)'' = (2)' \\
 (3)'' = -5 \cdot (3)' + (2)'
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 4 & 2 & 140 \\
 0 & -10 & 0 & -100 \\
 0 & 0 & -20 & -800
 \end{array} \right]$$

2.3.7 Anwendungsbeispiele

➤ Rückübersetzung:

$$\Rightarrow x_3 = \frac{-800}{-20} = 40$$

$$x_2 = \frac{-100}{-10} = 10$$

$$x_1 = 140 - 4 \cdot 10 - 2 \cdot 40 = 20$$

➤ Der Lösungsvektor lautet:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 40 \end{bmatrix}$$

2.4 Determinanten

2.4.1 Der Begriff der Determinante

2.4.2 Die Berechnung von Determinanten

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

2.4.4 Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe von Determinanten: Die Cramersche Regel

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

2.4.1 Der Begriff der Determinante

➤ Begriff der Determinante:

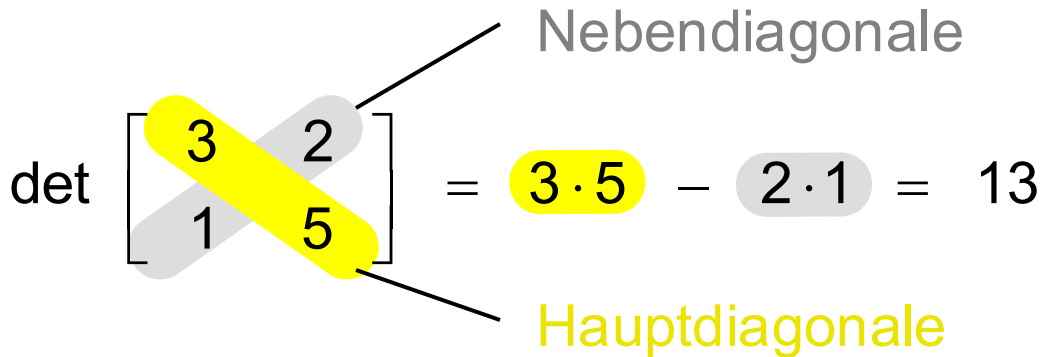
⇒ Eine Determinante bildet eine quadratische Matrix auf ein Skalar ab.

➤ Schreibweise:

⇒ $\det [A]$

➤ Beispiel:

⇒


$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 13$$

Nebendiagonale

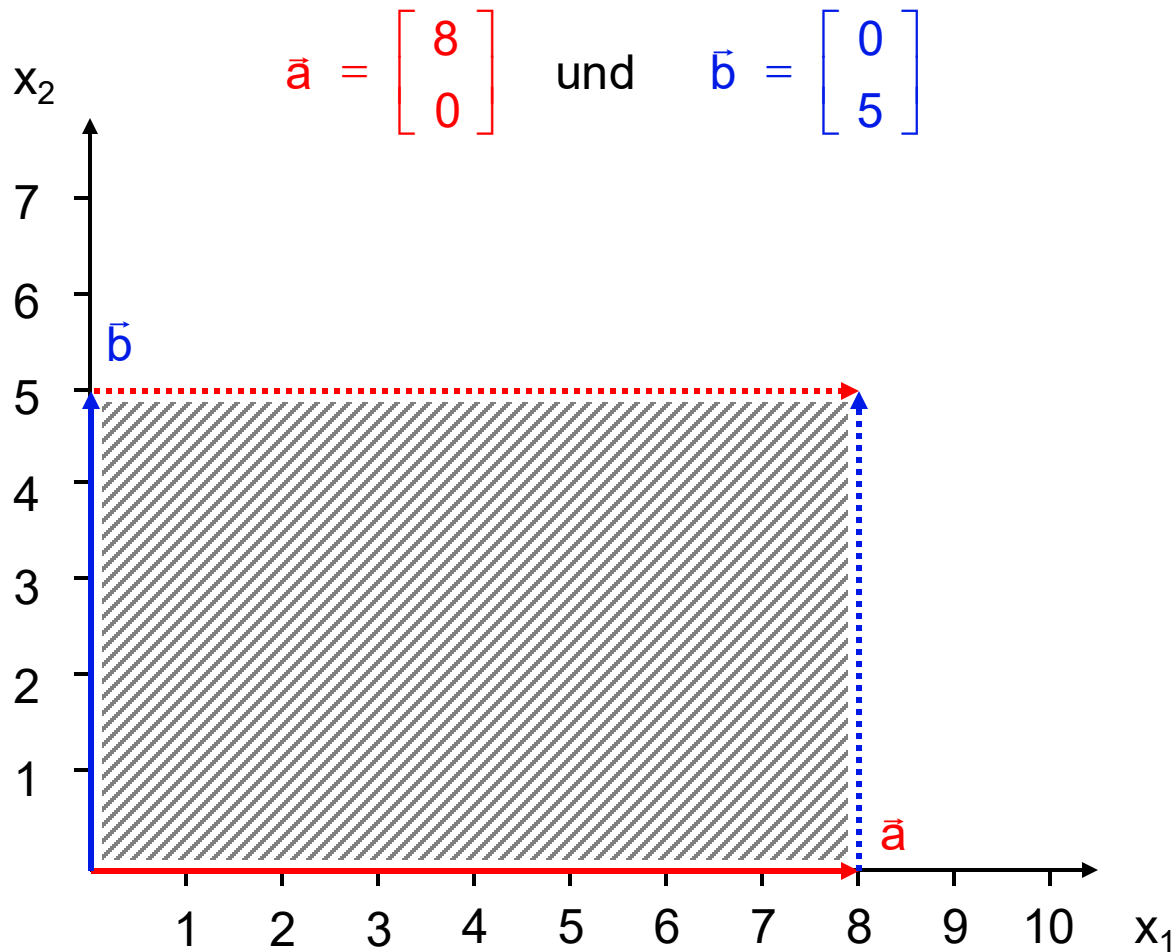
Hauptdiagonale

2.4.1 Der Begriff der Determinante

➤ Interpretation:

- Der Absolutwert der Determinante einer 2×2 -Matrix gibt den **Flächeninhalt des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms** wieder.
- Der Absolutwert der Determinante einer 3×3 -Matrix gibt das **Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Spats** (ein in den Raum erweitertes Parallelogramm) wieder.

2.4.1 Der Begriff der Determinante

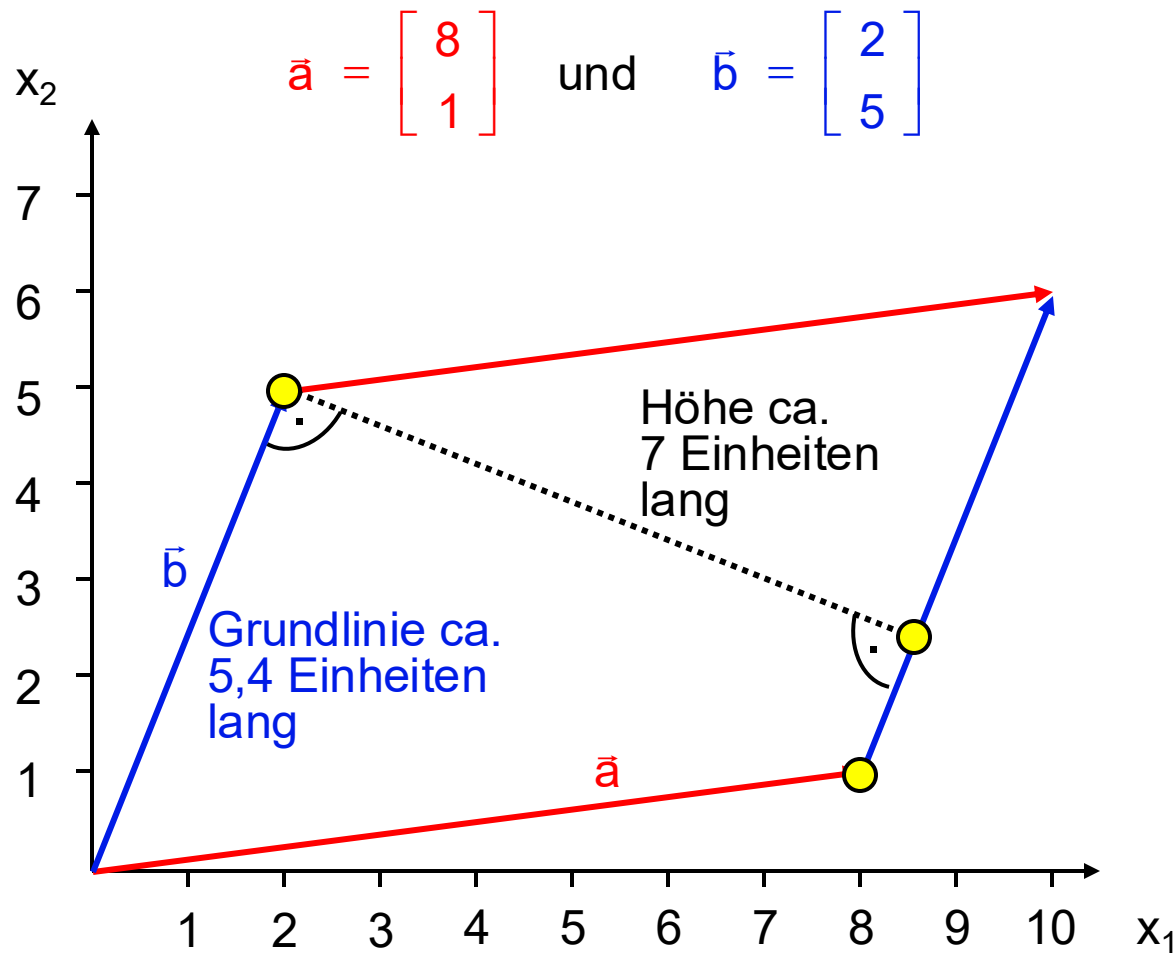


$$\det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ = 8 \cdot 5 - 0 \cdot 0 = 40$$

Flächeninhalt
Parallelogramm
(Rechteck)

$$= \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} \\ = 8 \cdot 5 = 40$$

2.4.1 Der Begriff der Determinante

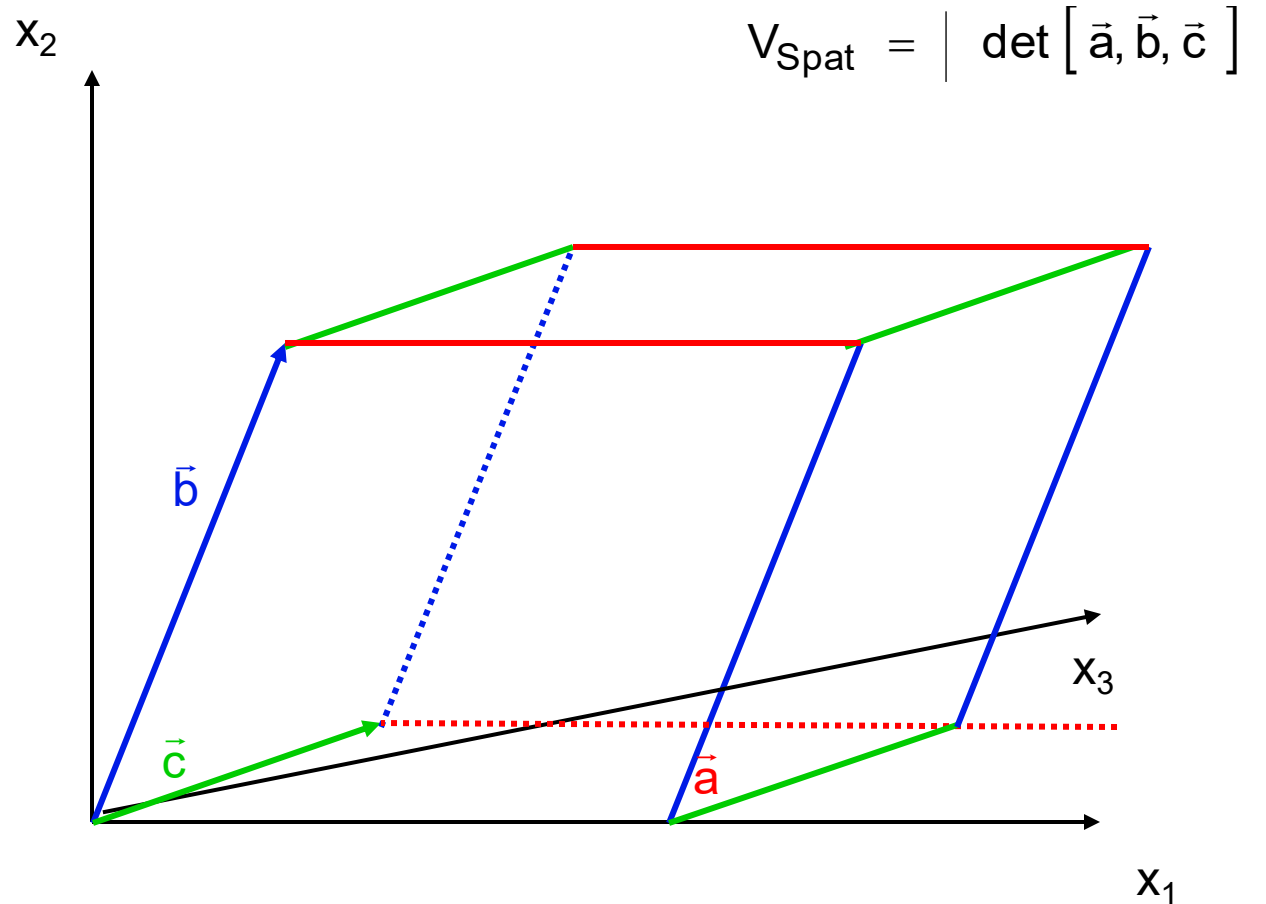


$$\det \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 8 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 38$$

Flächeninhalt
Parallelogramm

$$\begin{aligned} &= \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} \\ &= 5,4 \cdot 7 \approx 38 \end{aligned}$$

2.4.1 Der Begriff der Determinante



2.4 Determinanten

2.4.1 Der Begriff der Determinante

2.4.2 Die Berechnung von Determinanten

2.4.2.1 Die Regel von Sarrus

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

2.4.4 Lösung eines linearen Gleichungssystems
mit Hilfe von Determinanten: Die Cramersche Regel

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

2.4.2.1 Die Regel von Sarrus

➤ Anwendungsbereich der Sarrus'schen Regel:

⇒ Die Sarrus'sche Regel kann nur zur Berechnung von Determinanten von 2x2- und 3x3-Matrizen angewendet werden!

➤ Vorgehensweise der Sarrus'schen Regel:

- zunächst Matrix „erweitern“
- anschließend Produkte der Haupt- und Nebendiagonalen bilden
- Produkte der Hauptdiagonalen addieren, Produkte der Nebendiagonalen subtrahieren

➤ Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4.2.1 Die Regel von Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{"Erweitern"}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

Hauptdiagonalen

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

Nebendiagonalen

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

- Anwendungsbereich und Grundidee des Entwicklungssatzes nach Laplace:
 - Der Satz kann zur Berechnung der Determinanten von Matrizen jeglicher Größe herangezogen werden.
 - Determinanten werden mit Hilfe dieses Satzes um eine Dimension reduziert.
 - Determinanten können nach verschiedenen Zeilen oder Spalten entwickelt werden.
- Darstellung der Vorgehensweise an einem Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

⇒ Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

⇒ Die **Elemente der ersten Zeile** werden **mit den Unterdeterminanten multipliziert**, die sich ergeben, wenn die Zeile und die Spalte des jeweiligen Elements aus der Matrix gestrichen wird. Die Verknüpfung der Terme erfolgt nach einem bestimmten Schema!

$$\begin{array}{ccc}
 + & & - & & + \\
 \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & \boxed{2} & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{2} & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 1 & 2 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & 4 \\ \boxed{6} & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

⇒ Die Determinante der Matrix A berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 6) + 3 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 6) \\ &= 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-10) \\ &= 40 - 30 = 10 \end{aligned}$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

- Die Verknüpfung der Terme erfolgt nach dem folgenden Vorzeichenschema („Schachbrettmuster“):

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

➤ *Anmerkung:*

- ⇒ Es kann nach jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt werden. Am einfachsten ist es, wenn man die Zeile oder Spalte mit den meisten „Nullen“ wählt!

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

➤ Beispiel Dreiecksmatrix:

⇒ Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen!

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot 4 - 0 \cdot 1) - 0 + 0 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

2.4 Determinanten

2.4.1 Der Begriff der Determinante

2.4.2 Die Berechnung von Determinanten

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

2.4.4 Lösung eines linearen Gleichungssystems
mit Hilfe von Determinanten: Die Cramersche Regel

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

1. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 18 \end{bmatrix} = 18 - 14 = 4$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (4 - 0) \cdot (3 - 2) = 4$$

2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 8 - 0 = 8 \quad \text{und} \quad \det\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}_{99}$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

3. $\det(A) = \det(A^T)$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad \text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2$$

4. Werden zwei Zeilen oder Spalten vertauscht, so wechselt das Vorzeichen der Determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad \text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 4 = +2$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

5. Wird zu einer Zeile (oder Spalte) einer Matrix das λ -fache einer anderen Zeile (bzw. Spalte) addiert, verändert sich der Wert der Determinante nicht:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 5 - 2 = 3 \quad \text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 7 - 4 = 3$$

6. Wird jedes Element einer Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert, so ändert sich der Wert der Determinante um das λ -fache.

$$4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 4 \cdot (5 - 2) = 12$$

$$\text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = 20 - 8 = 12$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

$$7. \quad \det(\lambda \cdot A_{n \times n}) = \lambda^n \cdot \det(A_{n \times n})$$

$$\begin{aligned} \det\left(4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) &= \det\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} = 80 - 32 = 48 \\ &= 4^2 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 16 \cdot (5 - 2) = 48 \end{aligned}$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

$$8. \quad \det(A_{n \times n}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A_{n \times n}) = n$$

Ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten ist somit nur dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist, d.h., wenn die Zeilen linear unabhängig voneinander sind!

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot (2 - 0) - 0 + 0 = 6$$

$$\text{aber} \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

2.4 Determinanten

2.4.1 Der Begriff der Determinante

2.4.2 Die Berechnung von Determinanten

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

2.4.4 Lösung eines linearen Gleichungssystems
mit Hilfe von Determinanten: Die Cramersche Regel

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

2.4.4 Die Cramersche Regel

➤ Anwendungsbereich :

⇒ Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme der Form:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

bzw.

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots] \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

➤ Cramersche Regel:

$$x_1 = \frac{\det [\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots]}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \dots]}{\det A}$$

$$x_3 = \frac{\det [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \dots]}{\det A}$$

...

2.4.4 Die Cramersche Regel

➤ Beispiel aus Abschnitt 2.3.3:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{5 - 8}{0,5 - 2} = \frac{-3}{-1,5} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 0,5 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{4 - 10}{0,5 - 2} = \frac{-6}{-1,5} = 4$$

2.4.4 Die Cramersche Regel

➤ Exkurs:

⇒ Die Lösung des allgemeinen Gleichungssystems mit 2 Variablen und zwei Gleichungen aus Abschnitt 2.3.3 entspricht exakt dem Vorgehen der Cramerschen Regel:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

$$x_1 = \frac{a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

2.4 Determinanten

2.4.1 Der Begriff der Determinante

2.4.2 Die Berechnung von Determinanten

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

2.4.4 Lösung eines linearen Gleichungssystems
mit Hilfe von Determinanten: Die Cramersche Regel

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

- Zur Berechnung der Inversen kann die **adjungierte Matrix**, bezeichnet mit $\text{adj}(A)$, herangezogen werden:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

➤ Vorgehensweise zur Bestimmung der adjungierten Matrix:

- Zunächst wird die Matrix transponiert
(dies kann auch zu einem späteren Zeitpunkt geschehen).
- Die adjungierte Matrix ergibt sich dann als Matrix der Unterdeterminanten der transponierten Matrix, wobei wiederum das Vorzeichenschema des Entwicklungssatzes nach Laplace berücksichtigt werden muss. Für eine 3x3-Matrix lautet die Adjunkte:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} + \det_{11} & - \det_{12} & + \det_{13} \\ - \det_{21} & + \det_{22} & - \det_{23} \\ + \det_{31} & - \det_{32} & + \det_{33} \end{bmatrix}$$

Die Unterdeterminanten erhält man wiederum durch Streichen der zu einem Element zugehörigen Zeile und Spalte.

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix - Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (1-0) - 0 + 2 \cdot (0-0) = 2$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Berechnung siehe nächste Seite}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix - Beispiel

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & +\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ -\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & +\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ +\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & +\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.5 Einführung in die lineare Optimierung

2.5.1 Problemstellung

2.5.2 Beispiel für Standard-Maximum-Problem

2.5.3 Graphische Lösung des Beispiels

2.5.1 Problemstellung

- In der Ökonomie treten **Nebenbedingungen (Restriktionen)** häufig in Form von **Ungleichungen** statt in Form von Gleichungen auf.
- Darüber hinaus existiert eine zu **optimierende Zielfunktion**, beispielsweise soll der Gewinn maximiert oder die Kosten minimiert werden.
- Sind sowohl Nebenbedingungen als auch Zielfunktion linear, so spricht von einem **Problem der linearen Optimierung**.
- In der Vorlesung wird nur der einfache Fall eines linearen Optimierungsproblems mit zwei Variablen betrachtet und **graphisch gelöst**.
- Größere, praxisnahe Problemstellungen lassen sich mit Hilfe des **Simplex-Algorithmus** lösen (Aufbaumodul Quantitative Methoden im Bachelor-Studiengang).

2.5 Einführung in die lineare Optimierung

2.5.1 Problemstellung

2.5.2 Beispiel für Standard-Maximum-Problem

2.5.3 Graphische Lösung des Beispiels

2.5.2 Beispiel für ein Standard-Maximum-Problem

➤ Beispiel aus der Produktionsprogrammplanung:

Ein nach Gewinnmaximierung strebendes Unternehmen stellt zwei Produkte P_1 und P_2 in den Mengen x_1 und x_2 her. Beide Produkte durchlaufen die Maschinen M_1 und M_2 . Eine Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 benötigt auf der ersten Maschine 2 Zeiteinheiten (ZE) und auf der zweiten Maschine 3 ZE. Eine Mengeneinheit von Produkt 2 benötigt auf der ersten Maschine 4 ZE und auf der zweiten Maschine 2 ZE. Beide Maschinen haben jeweils eine Maximalkapazität von 2.400 ZE. Die Deckungsspanne (Preis abzüglich variable Stückkosten) beträgt für P_1 4 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit und für P_2 5 GE/ME.

Welche Mengen x_1 und x_2 soll das Unternehmen produzieren?

2.5.2 Beispiel für ein Standard-Maximum-Problem

➤ Allgemeine mathematische Formulierung der Aufgabe:

Maximiere die lineare Zielfunktion: $Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$

unter den linearen
Nebenbedingungen:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2$$

und unter den
Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$

➤ Modellformulierung für das konkrete Beispiel:

max $Z = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$
unter $2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 2.400$
 $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 2.400$
 $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$

2.5.2 Beispiel für ein Standard-Maximum-Problem

➤ Allgemeine Formulierung eines Maximum-/Minimum-Problems in Matrizenschreibweise:

Maximiere bzw. minimiere:

$$Z = c^T \cdot \mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$A \cdot \mathbf{x} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \mathbf{b}$$

und unter den
Beschränktheitsbedingungen:

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad \text{für alle } i$$

mit l_i = lower bound (untere Grenze)
 u_i = upper bound (obere Grenze)

Es können Ganzzahligkeitsbedingungen für einige oder alle Variablen x_i hinzutreten. Man spricht dann von der ganzzahligen linearen Optimierung/Programmierung.

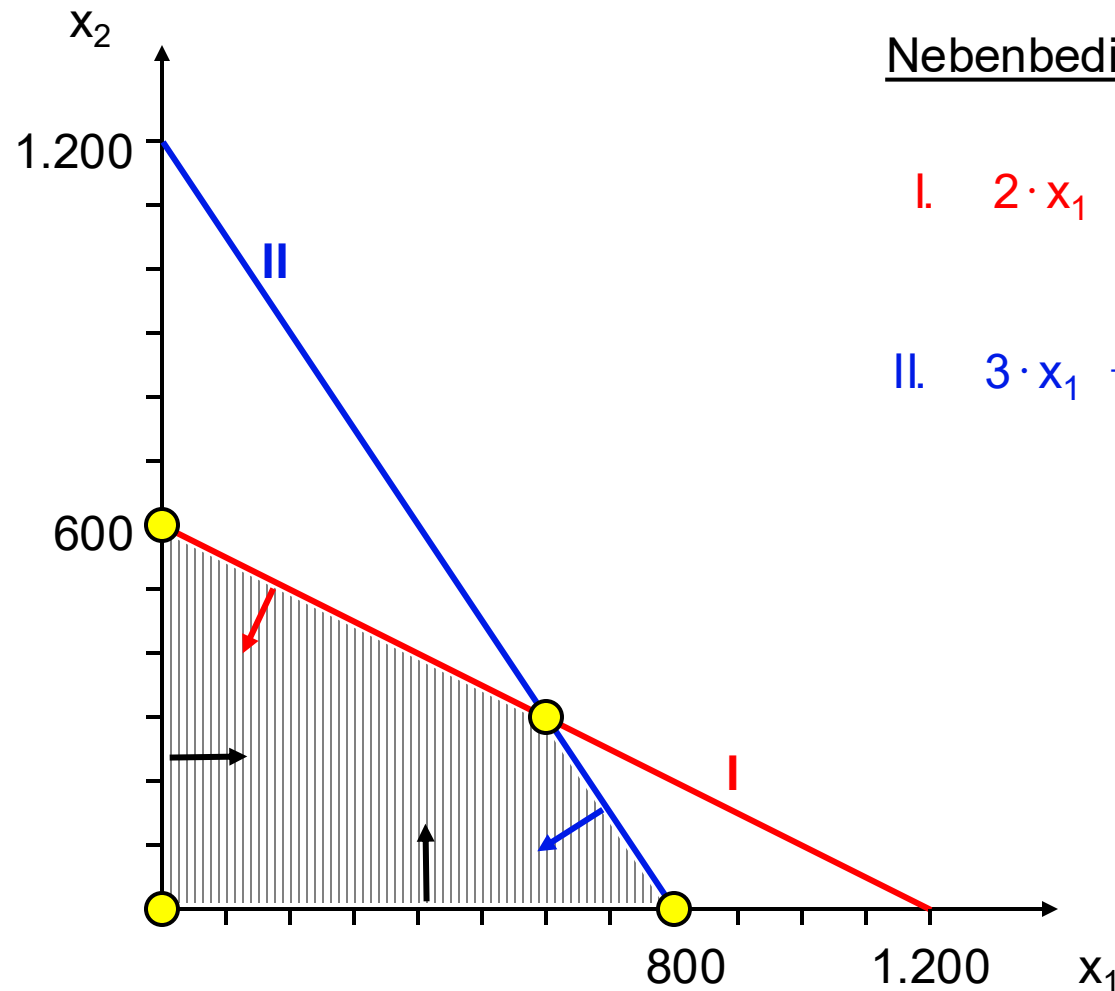
2.5 Einführung in die lineare Optimierung

2.5.1 Problemstellung

2.5.2 Beispiel für Standard-Maximum-Problem

2.5.3 Graphische Lösung des Beispiels

2.5.3 Graphische Lösung des Beispiels

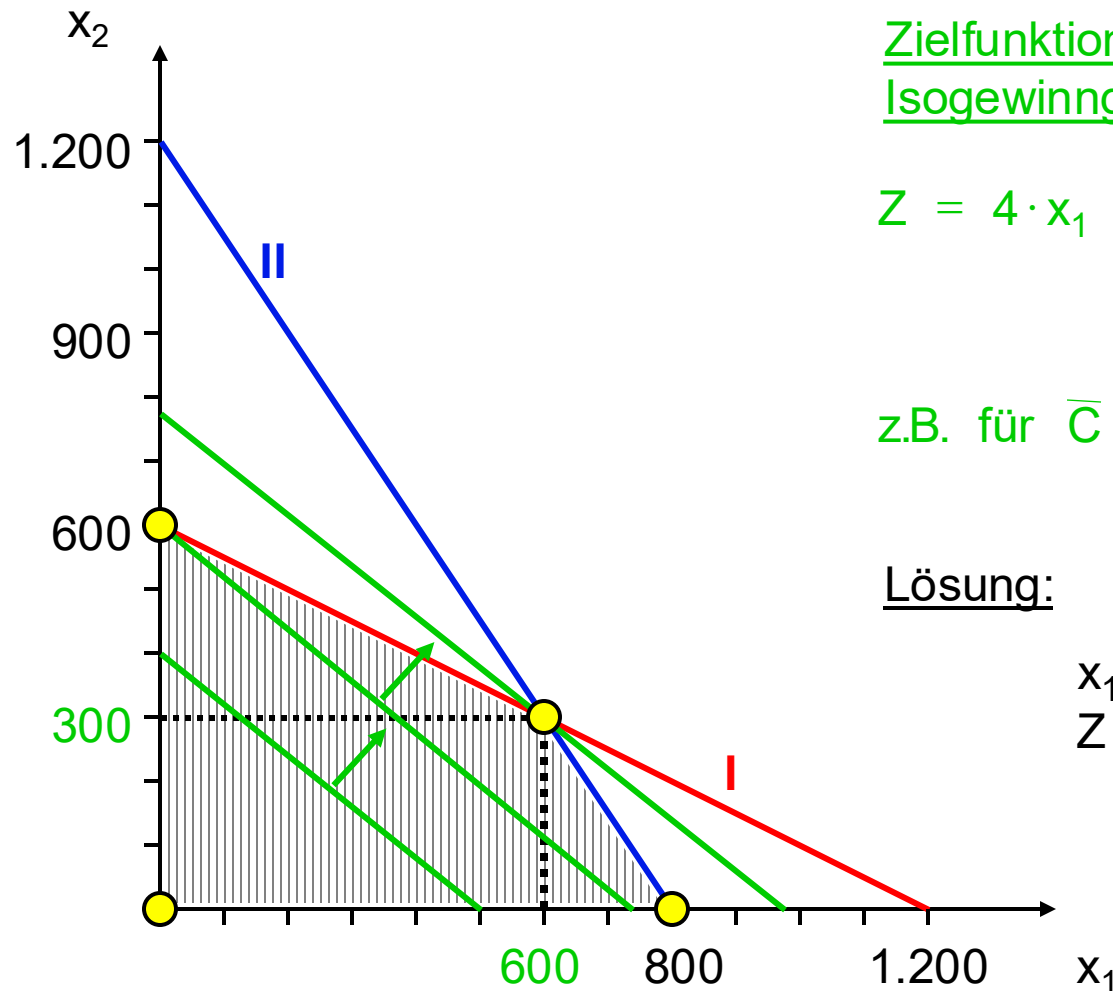


Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{I. } 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 2.400 \\ &\Leftrightarrow x_2 \leq 600 - 0,5 \cdot x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 2.400 \\ &\Leftrightarrow x_2 \leq 1.200 - 1,5 \cdot x_1 \end{aligned}$$

2.5.3 Graphische Lösung des Beispiels



Zielfunktion/
Isogewinngeraden:

$$Z = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = \bar{C}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{\bar{C}}{5} - \frac{4}{5} \cdot x_1$$

$$\text{z.B. für } \bar{C} = 2.000: x_2 = 400 - \frac{4}{5} \cdot x_1$$

Lösung:

$$x_1 = 600, \quad x_2 = 300, \\ Z = 4 \cdot 600 + 5 \cdot 300 = 3.900$$

Jetzt folgt Kapitel 3:

Folgen, Reihen und Grenzwerte

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615