



Bachelor Betriebswirtschaft

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Michael Bucker

Prof. Dr. Michael Bucker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Learning Outcomes

➤ Allgemeine Learning Outcomes:

- ⇒ Die Studierenden können ökonomische Fragestellungen mit Hilfe mathematischer Methoden lösen.
- ⇒ Die Studierenden wissen, unter welchen Voraussetzungen welche Methoden angewendet werden können bzw. müssen.

Learning Outcomes: Kompetenzfelder

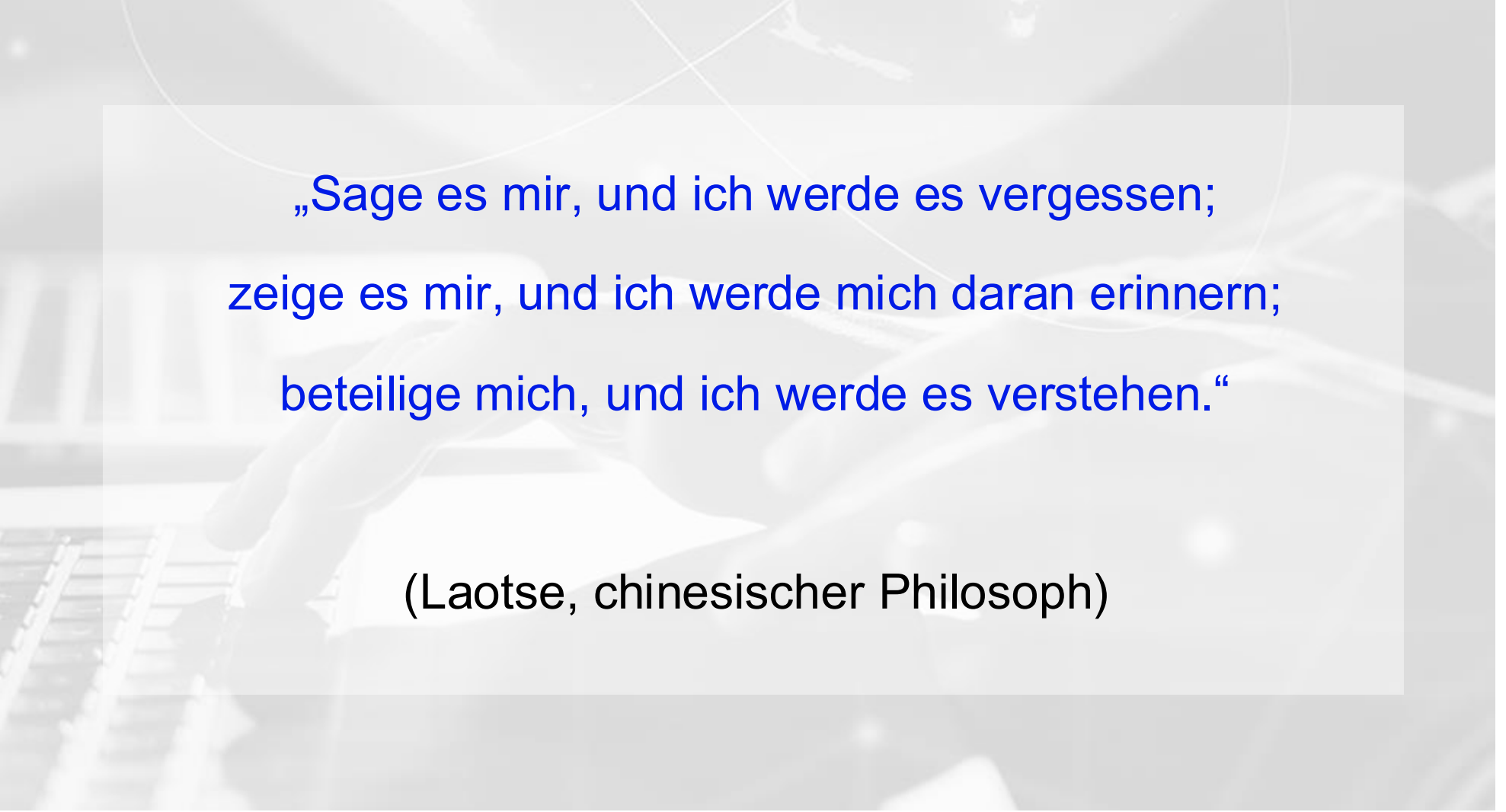
- Fach- und Methodenkompetenzen:
 - ⇒ Mathematisch-analytische Kompetenz
 - ⇒ Problemlösekompetenz
 - ⇒ Transferkompetenz
- Soziale und personale Kompetenzen:
 - ⇒ Selbstlern- und Selbstmanagementkompetenz
 - ⇒ Schriftliche und mündliche Kommunikationskompetenz
 - ⇒ Teamkompetenz

Learning Outcomes: Konkrete Lernziele

Die Studierenden ...

- ⇒ ... verfügen über ein solides mathematisches **Grundwissen**, um in den wirtschaftswissenschaftlichen Disziplinen verwendete mathematische Modelle nachzuvollziehen.
- ⇒ ... können **lineare Gleichungssysteme** aus ökonomischen Fragestellungen formulieren und auf unterschiedliche Art und Weise lösen.
- ⇒ ... können **lineare Optimierungsaufgaben** aus entsprechenden ökonomischen Problemstellungen formulieren und beherrschen die wichtigsten Lösungsmethoden.
- ⇒ ... können **Folgen und Reihen** charakterisieren, selbst entwickeln und diese sinnvoll bei ökonomischen Fragestellungen einsetzen (z. B. im Rahmen der Finanzmathematik).
- ⇒ ... beherrschen den Umgang mit **Funktionen** (Kurvendiskussion) und können die Kenntnisse auf ökonomische Sachverhalte (Kosten-, Erlös-, Gewinn-, Ertrags-, Preis-/Absatzfunktionen sowie Elastizitäten) übertragen.
- ⇒ ... können mit Hilfe der **Differentialrechnung** einer und mehrerer Veränderlicher entsprechende ökonomische (nichtlineare) **Extremierungsaufgaben mit und ohne Nebenbedingungen** formulieren und lösen.
- ⇒ ... beherrschen die **Integralrechnung** als Basis für die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** und **Statistik** und können mit Hilfe dieser Kenntnisse wichtige ökonomische Anwendungsaufgaben lösen.

Didaktischer Ansatz



„Sage es mir, und ich werde es vergessen;
zeige es mir, und ich werde mich daran erinnern;
beteilige mich, und ich werde es verstehen.“

(Laotse, chinesischer Philosoph)

Didaktischer Ansatz: Die sinnliche Spur der Erinnerung

Der Mensch behält von dem,

⇒ was er liest	10 %
⇒ was er hört	20 %
⇒ was er sieht	30 %
⇒ was er sieht und hört	50 %
⇒ worüber er selbst spricht	70 %
⇒ was er selbst ausführt	90 %

Quelle: W. Kowalczyk, K. Ottich: Schülern auf die Sprünge Helfen, 1995.



Didaktischer Ansatz:

Die drei Säulen des Gesamtkonzeptes

1. Vorlesung mit begleitenden Übungsaufgaben

- ⇒ Teilnahme unbedingt empfohlen zur Vorbereitung auf die Klausur
- ⇒ Probeklausur voraussichtlich in der vierten Vorlesungswoche zur Überprüfung der Grundlagenkenntnisse

2. Tutorien

- ⇒ Wiederholung der Inhalte aus den Vorlesungen inklusive Besprechung der dort genannten Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur
- ⇒ im wöchentlichen Rhythmus, moderiert durch Tutor*innen (Studierende höherer Semester) nach dem Konzept des „Inverted Classroom“

3. Coaching

- ⇒ Coaching durch Barbara Vette, insbesondere zur Übung für die Klausur, E-Mail: barbara.vette@fh-muenster.de
 - Coaching Grundlagen Wirtschaftsmathematik:
 - aufbauend auf den Ergebnissen der Probeklausur aus der Vorlesung
 - Details zum Coaching durch Barbara Vette in der Kick-off-Veranstaltung
 - Coaching ILIAS-Probetest:
 - Zur Vorbereitung auf die Prüfung bearbeiten Sie im PC-Pool unter Anleitung Aufgaben, die wir Ihnen in Form eines digitalen ILIAS-Tests zur Verfügung stellen.
 - Gleichzeitig haben Sie die Möglichkeit, im Anschluss an den ILIAS-Probetest Fragen zu stellen.

Termine

- **Vorlesungstermine (siehe Zeitplan auf der Webseite):**
 - ⇒ dienstags, 12:30 bis 14:00 Uhr
 - ⇒ donnerstags, 16:00 bis 17:30 Uhr
 - ⇒ Ausnahmen siehe detaillierten Zeitplan
- **Termine Tutorien im Bachelor BWL:**
 - ⇒ wöchentlich (ab zweiter Vorlesungswoche), voraussichtlich 4 Termine (zur Auswahl), sind noch mit den Tutor*innen festzulegen bzw. liegen bereits im myFH-Portal vor.
- **Termine Coaching:**
 - ⇒ Coaching Grundlagen Wirtschaftsmathematik:
 - ⇒ Kick-off via Zoom am Donnerstag, 13.11.2025, 18:00 Uhr (Link mit Zoomraum wird durch Barbara Vette bekannt gegeben).
 - ⇒ Coaching ILIAS-Test zum Vorlesungsende: Termin wird in der Vorlesung noch bekannt gegeben.
- **Sprechstunden:**
 - ⇒ nach Vereinbarung per E-Mail

Organisatorisches: Unterlagen

➤ Gliederung, Zeitplan und Literatur zur Veranstaltung:

- ⇒ Gliederung, Zeitplan und Literatur (bei Bedarf) stehen auf der Webseite zur Vorlesung zum Download bereit.

➤ Folienskript:

- ⇒ Das Folienskript steht auf der Webseite zur Vorlesung als Download zur Verfügung.
- ⇒ Die Folien sollten vorab zu Hause durchgearbeitet werden.

➤ Formelsammlung:

- ⇒ Auf der Webseite zur Vorlesung finden Sie bei Bedarf zudem die wichtigsten Vorlesungsfolien als „Formelsammlung“ zusammengestellt (ohne Beispielaufgaben).
- ⇒ Diese darf in den Präsenz-Prüfungen benutzt werden (Markierungen sind erlaubt).

Organisatorisches: Unterlagen

➤ Aufgaben:

- ⇒ Die Aufgaben sind auf der Webseite zur Vorlesung abrufbar.
- ⇒ In der Vorlesung wird nur ein kleiner Teil der Aufgaben besprochen.
- ⇒ Die angegebenen übrigen Aufgaben sind regelmäßig zu Hause zu lösen!
- ⇒ Hilfreich sind selbst organisierte Arbeitsgruppen, in denen Sie gemeinsam Aufgaben rechnen und Fragen besprechen.
- ⇒ Fragen zu den angegebenen Aufgaben sind in der darauffolgenden Veranstaltung zu stellen.
- ⇒ Weitere Hilfe erhalten Sie in den Tutorien.
- ⇒ Ergänzende Unterstützung gibt es im Coaching.

Prüfungen: Termine/Sonstiges

➤ Prüfungsanmeldung:

⇒ vom 13.10.2025 bis zum 14.11.2025
beim Prüfungsamt bzw. im myFH-Portal!

➤ Prüfungsleistung: 60-minütiger ILIAS-Test in Präsenz:

⇒ im Prüfungszeitraum Februar 2026

➤ Für die Prüfung zugelassene Hilfsmittel:

⇒ Taschenrechner (siehe auch nächste Folien), z. B.
CASIO FX-85DE Plus, CASIO FX-82DE Plus,
CASIO FX-85DE X (CW), CASIO FX-82DE X (CW) –
das verwendete Taschenrechnermodell ist auf dem
Klausurdeckblatt anzugeben

⇒ 51-seitige "Ergänzung zur Formelsammlung aus ILIAS sowie jede
kommerziell erwerbbarer Formelsammlung" (Markierungen und
Post-Its zu Überschriften erlaubt)

⇒ falls erforderlich unkommentiertes, nicht-elektronisches
Wörterbuch für Fremdsprachen

Prüfungen: Taschenrechner (1)

- Für Präsenzklausuren an der MSB bzw. am FB Wirtschaft sind **nur Taschenrechner zugelassen**, die folgenden **Kriterien** genügen:
 1. nicht programmierbar
 2. nicht grafikfähig
 3. Speicherung maximal einer Formel
 4. keine Gaußelimination/Stufenform berechenbar
 5. kein Lösen von Ungleichungen
 6. keine (approximative) Berechnung von Extremwerten
 7. Darüber hinaus sind modifizierte Taschenrechner (veränderte Soft- und Hardware) sowie zur Kommunikation fähige Taschenrechner generell ausgeschlossen.
- **Taschenrechner, die diesen Kriterien genügen**, sind z. B.
 - CASIO FX-85DE Plus oder CASIO FX-85DE X (CW) (Solar- und Batteriebetrieb)
 - CASIO FX-82DE Plus oder CASIO FX-82DE X (CW) (nur Batteriebetrieb)
 - Neben der deutsche Bediensprache (DE) sind auch andere Bediensprachen (z. B. ES) erlaubt.



Prüfungen: Taschenrechner (2)

➤ Erläuterungen zu den einzelnen Punkten:

3. Die Speicherung EINER Formel ist erlaubt. Ebenso die Wiederholung einer Formel über die gespeicherten Zeilen. Der Zugriff auf mehrere Formelspeicher oder auf Variablen in diesen Formeln ist nicht erlaubt.
4. Hierzu zählt auch die Berechnung Matrizen (Determinante, Inverse, Gleichungssysteme). Der in vielen Bundesländern zum Abitur zugelassene **CASIO FX-991 DE** und auch der **TI-30X Pro MultiView** können zusätzlich die Stufenform berechnen, weswegen diese Taschenrechner **nicht zugelassen** sind.
5. Einige Taschenrechner können die Bereiche bestimmen, in welchen eine Ungleichung erfüllt ist. Diese Rechner sind ebenfalls nicht zugelassen.
6. Einige Taschenrechner können Tabellen/Listen von Funktionswerten erstellen. Dies ist das Maximum des Funktionsumfanges. Können die Taschenrechner darüber hinaus Extremwerte berechnen, sind die Taschenrechner ebenfalls nicht zugelassen.

Organisatorisches: Erwartungen

- Das dürfen Sie von uns erwarten ...
 - ... pünktlicher Veranstaltungsbeginn
 - ... gut vorbereitete Veranstaltungen mit Anwendungsbezug
 - ... Vermittlung des Lehrstoffes anhand von kleineren Fallstudien
 - ... weitere Aufgaben zur Festigung der Lerninhalte
 - ... eine faire Prüfung ...

- Wir erwarten von Ihnen, dass Sie sich aktiv beteiligen, indem Sie ...
 - ... bei Präsenzveranstaltungen pünktlich erscheinen, ihre Handys auf „stumm“ schalten (und in der Tasche verschwinden lassen) und keine Unterhaltungen über fachfremde Inhalte führen
 - ... bei Online-Veranstaltungen Ihre Webcams einschalten (!)
 - ... Fragen stellen, falls Sachverhalte unklar bleiben
 - ... sich in der Veranstaltung durch eigene Beiträge engagieren
 - ... die in den Veranstaltungen gestellten Aufgaben vorbereiten

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte
- 4 Funktionen
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
- 6 Integralrechnung
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen



Kapitel 1:

Mathematisches Grundwissen

Prof. Dr. Christiane Fühner
Prof. Dr. Anja Stumpf

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

1 Mathematisches Grundwissen

1.1 Begriffe und Symbole

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

1.3 Rechenregeln für reelle Zahlen

1.4 Mengen und Abbildungen

1.5 Lösung von Gleichungen in einer Variablen

1.6 Ungleichungen

1.7 Das Summen- und das Produktzeichen

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Gleichheit und Ungleichheit

$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$<$	„ist kleiner als“
$\leq$	„ist kleiner oder gleich“
$>$	„ist größer als“
$\geq$	„ist größer oder gleich“
$\approx$	„ist ungefähr gleich“
$:=$	„ist definiert als“
$\Rightarrow$	„daraus folgt“ bzw. „wenn, dann“
$\Leftrightarrow$	„ist äquivalent“ bzw. „genau dann, wenn“
$:\Leftrightarrow$	„definitionsgemäß genau dann, wenn“

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Logische Verknüpfungen:

$A \wedge B$ „A und B“
 $\Rightarrow$ sowohl A als auch B

$A \vee B$ „A oder B“ (lat.: vel)
 $\Rightarrow$ entweder A oder B oder beides gleichzeitig)

➤ Verknüpfungen von Mengen

$\setminus$ „ohne“

$\cap$ „geschnitten mit“

$\cup$ „vereinigt mit“

$\in$ „ist Element“

$\notin$ „ist nicht Element“

$\subset$ „ist Teilmenge von“

$\supset$ „ist Obermenge von“

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Weitere Zeichen:

$\forall$ „für alle“, z.B. $M := \{ 1, 2 \}$
 $(\forall x \in M) (x > 0)$ „Für alle $x \in M$ gilt, x ist größer null.“

$\exists$ „... es existiert ein ...“, z.B. $M := \{ -1, 2, 3 \}$
 $(\exists x \in M) (x < 0)$ „Es existiert ein $x \in M$, für das gilt, x ist kleiner null.“

$|M|$ Anzahl der Elemente einer Menge, z.B. $M := \{ 1, 2 \}$
 $|M| = 2$

nicht zu verwechseln mit:

$|z|$ Betrag einer Zahl

$$|z| = \begin{cases} +z & \text{für } z \geq 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Konstante

π	Pi = 3,14159... (Verhältnis Kreisumfang zum Durchmesser)
e	Eulersche Zahl $e = 2,71828...$ (kont. Wachstumsfaktor)

➤ Algebra und Elemente der Analysis

$ z $	Betrag von z (absoluter Wert einer reellen Zahl)
$n!$	n Fakultät ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$)
Σ	Summenzeichen
Π	Produktzeichen
$\sqrt{\quad}$; $\sqrt[n]{\quad}$	Quadratwurzel aus, n -te Wurzel aus
$dx, \partial x$	Differential (unendlich kleines Stück in x -Richtung)
$\det$	Determinante
$\vec{x}, \mathbf{x}$	Vektor

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Grenzwerte

∞	unendlich
$\rightarrow$	„nähert sich“, „strebt nach“
$\lim$	Limes (Grenzwert)

➤ Exponential- und Logarithmusfunktion

e^x, a^x	Exponentialfunktion zur Basis e oder allgemein zur Basis a
$\log_a x$	Logarithmus zur Basis a von x
$\lg x$	dekadischer Logarithmus (Zehnerlogarithmus) von x
$\ln x$	natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis e) von x

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Das griechische Alphabet:

Aα	Alpha	Iι	Iota	Pρ	Rho
Bβ	Beta	Kκ	Kappa	Σσ	Sigma
Γγ	Gamma	Λλ	Lambda	Tτ	Tau
Δδ	Delta	Mμ	My	Υυ	Ypsilon
Eε	Epsilon	Nν	Ny	Φφ	Phi
Zζ	Zeta	Ξξ	Xi	Xχ	Chi
Hη	Eta	Oο	Omikron	Ψψ	Psi
Θθ	Theta	Ππ	Pi	Ωω	Omega

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

Komplexe Zahlen

Reelle Zahlen

Rationale Zahlen

Ganze Zahlen

**Natür-
liche
Zahlen**

null

**negative
ganze
Zahlen**

**endliche
und
unendlich
periodische
Brüche**

**irrationale
Zahlen**

**imaginäre
Zahlen**

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

$\mathbb{IN}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\{1; 2; 3; 4; \dots\}$
$\mathbb{IN}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null	$\{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	Menge aller als Bruch ganzer Zahlen darstellbarer Zahlen
$\mathbb{IR}$	Menge der reellen Zahlen	zusätzlich zu $\mathbb{Q}$ sind alle irrationalen Zahlen ($e, \pi, \sqrt{2}, \dots$) enthalten
$\mathbb{IR}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen	$\{x \mid x \in \mathbb{IR} \wedge x > 0\}$
$\mathbb{IR}_0^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\{x \mid x \in \mathbb{IR} \wedge x \geq 0\}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	zusätzlich zu $\mathbb{IR}$ sind auch alle Wurzeln aus negativen Zahlen (imaginäre Zahlen) enthalten

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

Bezeichnung	Darstellung	Bedeutung
abgeschlossenes Intervall	$a \leq x \leq b$ [a; b]	Menge aller reellen Zahlen zwischen einschließlich a und b
offenes Intervall	$a < x < b$] a; b [	Menge aller reellen Zahlen zwischen ausschließlich a und b
halboffenes Intervall	$a \leq x < b$ [a; b [	Menge aller reellen Zahlen zwischen einschließlich a und ausschließlich b

1.3 Rechenregeln für reelle Zahlen

1.3 Rechenregeln für reelle Zahlen

- 1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)
- 1.3.2 Klammersausdrücke und Binomische Formeln
- 1.3.3 Addition und Subtraktion von Brüchen
- 1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)
- 1.3.5 Potenzen und Wurzeln
- 1.3.6 Logarithmen

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

➤ Grundrechenarten:

- Addieren
(Summe): $a + b$
- Subtrahieren
(Differenz): $a - b$
- Multiplizieren
(Produkt): $a \cdot b$
- Dividieren
(Quotient): $\frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

➤ Grundgesetze (Axiome):

■ Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation:

$$\Rightarrow a + b = b + a \quad \text{z.B. } 2 + 3 = 3 + 2 = 5$$

$$\Rightarrow a \cdot b = b \cdot a \quad \text{z.B. } 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$$

■ Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation:

$$\Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{z.B. } (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$$

$$\Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{z.B. } (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$$

■ Distributivgesetze (Verknüpfung von Addition und Multiplikation)

$$\Rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{z.B. } 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14$$

$$\Rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{z.B. } (2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 25$$

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

➤ *Beachte:*

⇒ Das Multiplikationszeichen „ $\cdot$ “ wird häufig vor Klammern und vor oder nach Variablen weggelassen:

Statt zum Beispiel $a \cdot (2 \cdot b + 3 \cdot c)$ schreibt man $a(2b + 3c)$.

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

➤ Elementare Rechenregeln für Vorzeichen:

- $-(-a) = +a = a$
- $-(ab) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$
„Minus mal Plus ergibt Minus“
- $(-a)(-b) = ab$
„Minus mal Minus ergibt Plus“

➤ Beispiele:

- $-(2 \cdot 3 \cdot 4) = (-2) \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot (-3) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot (-4) = -24$
- $(-2) \cdot (-3) = 6$

1.3.2 Klammersausdrücke und Binomische Formeln

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

1.3.2 Klammersausdrücke und Binomische Formeln

1.3.3 Bruchrechnen

1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)

1.3.5 Potenzen und Wurzeln

1.3.6 Logarithmen

1.3.2 Klammersausdrücke und Binomische Formeln

- Kommen in einem mathematischen Ausdruck mehrere Operationszeichen, aber **keine Klammern** vor, so gilt die Regel:
 - ⇒ **Punktrechnung (Multiplikation, Division) geht vor Strichrechnung (Addition, Subtraktion).**
 - ⇒ z. B. $5 + 3 \cdot 7 = 5 + 21 = 26$
- Enthält ein Ausdruck **Klammern**, so sind diese zuerst zu berechnen:
 - ⇒ z. B. $(5 + 3) \cdot 7 = 8 \cdot 7 = 56$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Auflösen von Klammern:

- ⇒ Steht vor der Klammer ein Pluszeichen, so kann die Klammer weggelassen werden:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

- ⇒ Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, so wird beim Weglassen der Klammer ein Summand zum Subtrahenden und ein Subtrahend zum Summanden:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Auflösen von Klammern:

⇒ Beispiele:

$$(10x + 5y) + (4x - 2y) = 14x + 3y$$

$$(5a + 7b) - (-3a + 3b) = 8a + 4b$$

➤ Doppelklammern und mehrgliedrige Klammerausdrücke:

⇒ Beispiele:

$$4x - [(3x + 2y) - (7x - 5y)] = 4x - [-4x + 7y] = 8x - 7y$$

$$\begin{aligned} 10m - \{ 4m - [(2m - 3n) - (6m + 11n)] \} \\ = 10m - \{ 4m - [-4m - 14n] \} \\ = 10m - \{ 8m + 14n \} = 2m - 14n \end{aligned}$$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Multiplikation von zwei in Klammer stehenden Summen:

⇒ Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer unter Beachtung der Vorzeichenregeln multipliziert:

⇒ Beispiel:

$$(3a - 2) \cdot (4 + 5b) = 12a + 15ab - 8 - 10b$$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Binomische Formeln:

1. Binomische Formel:

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel:

$$(a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Exkurs: Potenzen von Binomen (Vorgriff auf Kapitel 1.3.5)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \\&= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) \\&= a^2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot b \cdot a + b^2 \cdot a + a^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b + b^2 \cdot b \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Exkurs: Potenzen von Binomen (Vorgriff auf Kapitel 1.3.5)

⇒ Pascalsches Dreieck

= Gesetzmäßigkeit der Vorzahlen
durch ihre Anordnung in einem Dreieck

$(a + b)^0$					1					
$(a + b)^1$					1		1			
$(a + b)^2$				1		2		1		
$(a + b)^3$			1		3		3		1	
$(a + b)^4$		1		4		6		4	1	
$(a + b)^5$	1		5		10		10		5	1

1.3.3 Bruchrechnen

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

1.3.3 Bruchrechnen

1.3.3.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

1.3.3.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

1.3.3.3 Multiplikation und Division von Brüchen

1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)

1.3.5 Potenzen und Wurzeln

1.3.6 Logarithmen

1.3.3.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

➤ Erweitern von Brüchen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

z.B. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

➤ Kürzen von Brüchen:

$$\frac{a : d}{b : d} = \frac{a}{b}$$

z.B. $\frac{24 : 3}{9 : 3} = \frac{8}{3}$

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y) \cdot (x - y)}{x - y} = x + y$$

In beiden Fällen ändert sich der Wert des Bruches nicht!

1.3.3.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

➤ Vorgehensweise zur Addition bzw. Subtraktion:

- ⇒ zunächst Nenner gleichnamig machen (Hauptnenner bestimmen, also Suche nach dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen)
- ⇒ anschließend Zähler addieren bzw. subtrahieren

➤ Allgemein:

$$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

➤ Beispiele:

$$\blacksquare \quad \frac{5}{7} + \frac{6}{7} - \frac{-3}{7} = \frac{5+6-(-3)}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$\blacksquare \quad \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{7}{4} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 6} + \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{16+30+21}{12} = \frac{67}{12}$$

1.3.3.3 Multiplikation und Division von Brüchen

➤ Multiplikation von Brüchen:

■ Vorgehensweise:

⇒ jeweils Zähler und Nenner miteinander multiplizieren

■ Allgemein:

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

■ Beispiele:

$$\Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)}{(x+y)} \cdot \frac{(x+y)}{x} = \frac{(x-y) \cdot (x+y)}{(x+y) \cdot x} = \frac{x-y}{x}$$

1.3.3.3 Multiplikation und Division von Brüchen

➤ Division zweier Brüche:

■ Vorgehensweise:

⇒ Der erste Bruch wird mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

■ Allgemein:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

■ Beispiele:

$$\frac{\frac{4}{2}}{\frac{1}{1}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{\frac{xy}{z}}{\frac{2y}{z^2}} = \frac{xy}{z} \cdot \frac{z^2}{2y} = \frac{xz}{2}$$

1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

1.3.3 Bruchrechnen

1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)

1.3.4.1 Der Begriff des Absolutbetrags

1.3.4.2 Regeln für das Rechnen mit Absolutbeträgen

1.3.5 Potenzen und Wurzeln

1.3.6 Logarithmen

1.3.4.1 Der Begriff des Absolutbetrags

➤ Absolutbetrag:

⇒ Betrag einer reellen Zahl

⇒ Abstand dieser Zahl auf der Zahlengerade von Null

⇒ Definition:

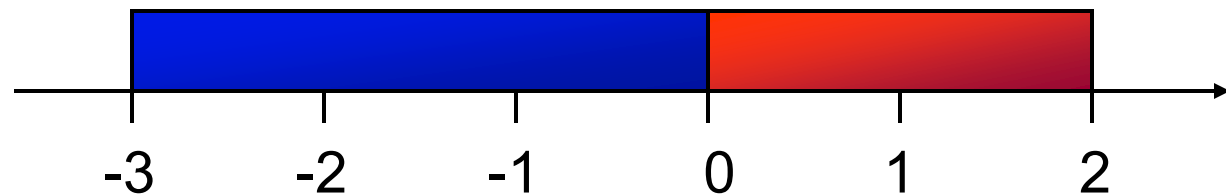
$$|z| = \begin{cases} +z & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

⇒ Beispiele:

$$|-3| = 3 \quad \text{oder} \quad |2| = 2$$

**Abstand
= 3 Einheiten**

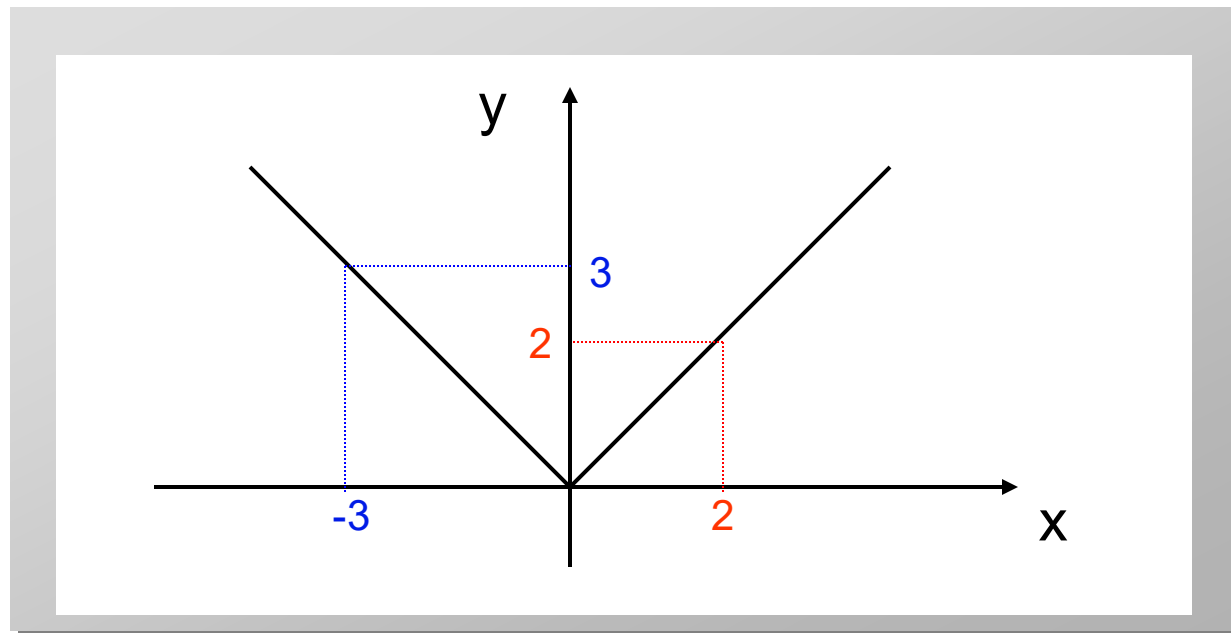
**Abstand
= 2 Einheiten**



1.3.4.1 Der Begriff des Absolutbetrags

➤ Exkurs: Die Betragsfunktion

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} +x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$



1.3.4.2 Regeln für das Rechnen mit Absolutbeträgen

Regeln:

$$1. \quad |-a| = |a|$$

$$2. \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$3. \quad |a + b| \geq ||a| - |b||$$

$$4. \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$5. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Beispiele:

$$|-3| = |3| = 3$$

$$|-2 + 5| \leq |-2| + |5|$$

denn $3 < 7$

$$|-2 - 5| \geq ||-2| - |-5||$$

denn $7 \geq 3$

$$|-3 \cdot 4| = |-3| \cdot |4| = 12$$

$$\left| \frac{-8}{4} \right| = \frac{|-8|}{|4|} = 2$$

1.3.5 Potenzen und Wurzeln

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

1.3.3 Bruchrechnen

1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)

1.3.5 Potenzen und Wurzeln

1.3.5.1 Der Potenzbegriff,
Vorzeichenregeln und Potenzgesetze

1.3.5.2 Der Wurzelbegriff,
Vorzeichenregeln und Wurzelgesetze

1.3.6 Logarithmen

1.3.5.1 Der Potenzbegriff, Vorzeichenregeln und Potenzgesetze

➤ Der Potenzbegriff:

⇒ Das n-fache Produkt einer Zahl mit sich selbst ergibt die n-te-Potenz dieser Zahl.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n = b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

a: heißt Basis

n: heißt Exponent

b: heißt Potenzwert

⇒ Beispiel: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Basis = 2, Exponent = 3, Potenzwert = 8

1.3.5.1 Der Potenzbegriff, Vorzeichenregeln und Potenzgesetze

➤ Es gilt:

$$a^1 = a$$

$$1^1 = 1$$

$$a^0 := 1$$

$$0^n = 0 \quad \text{mit } n \neq 0$$

➤ Vorzeichenregeln:

$$(-a)^{2n} = (+a)^{2n} \quad \Rightarrow \text{gerader Exponent}$$

$$(-a)^{2n+1} \neq (+a)^{2n+1} \quad \Rightarrow \text{ungerader Exponent}$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad \text{mit } a \neq 0$$

1.3.5.1 Der Potenzbegriff, Vorzeichenregeln und Potenzgesetze

➤ Die Potenzgesetze:

$$1. \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$3. \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$4. \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

1.3.5.2 Der Wurzelbegriff, Vorzeichenregeln und Wurzelgesetze

➤ Wurzeln:

- Die „erste“ Umkehrung der Potenzierung ist das Wurzelziehen.
- Wurzelziehen = Radizieren

$$a^n = b$$

$$a = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b^1} =: b^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$$

n: heißt Wurzelexponent,
b: heißt Radikand

für $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Vorsicht: Bei ungeradem Wurzelexponenten gibt es für $b \in \mathbb{R}_{< 0}$ Konsistenzprobleme mit den Rechengesetzen.

1.3.5.2 Der Wurzelbegriff, Vorzeichenregeln und Wurzelgesetze

➤ Wurzeln aus negativen Zahlen

- Wurzeln aus negativen Zahlen sind zwar grundsätzlich **erlaubt**, wenn der **Wurzelexponent eine ungerade Zahl** ist:
 - ⇒ Zum Beispiel hat $\sqrt[3]{-8}$ als einzige reelle Zahl -2 zur Lösung.
 - ⇒ Allerdings ergeben sich – wie oben schon erläutert - bei negativem Radikand und ungeradem Wurzelexponenten Konsistenzprobleme mit den Rechengesetzen.
 - ⇒ Aus diesem Grund wird **im folgenden immer** von einem **nichtnegativen Radikanden b** ausgegangen: es gilt also $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- *Anmerkung:*
Ist der Wurzelexponent gerade, so ist die Wurzel aus einer negativen Zahl keine reelle Zahl mehr. Die Wurzel aus einem negativen Radikanden ist dann eine komplexe Zahl.

1.3.5.2 Der Wurzelbegriff, Vorzeichenregeln und Wurzelgesetze

➤ Vorzeichen:

⇒ Wird $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gesetzt, so ist die Wurzel $\sqrt[n]{b}$ immer positiv!

➤ Rechenregeln:

Für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$1. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$2. \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$3. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

1.3.6 Logarithmen

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

1.3.3 Bruchrechnen

1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)

1.3.5 Potenzen und Wurzeln

1.3.6 Logarithmen

1.3.6.1 Der Begriff des Logarithmus

1.3.6.2 Dekadischer und natürlicher Logarithmus

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

1.3.6.1 Der Begriff des Logarithmus

➤ Die **Logarithmierung** ist die 2. Umkehrung der **Potenzierung**:

Potenzierung	Radizieren: „erste“ Umkehrung	Logarithmieren: „zweite“ Umkehrung
$2^3 = ?$	$?^3 = 8$ $\Leftrightarrow ? = \sqrt[3]{8}$	$2^? = 8$ $\Leftrightarrow ? = \log_2 8$
Frage nach dem Potenzwert	Frage nach der Basis	Frage nach dem Exponenten

1.3.6.1 Der Begriff des Logarithmus

➤ Definition:

- $\log_a x = y$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Der Logarithmus einer Zahl $x > 0$ zur Basis a ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um den Numerus (x) zu erhalten.
- $\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$
- a : heißt **Basis**
 x : heißt **Numerus**
 y : heißt **Logarithmus**

1.3.6.1 Der Begriff des Logarithmus

➤ Es gilt insbesondere:

$$\log_a a = 1, \text{ denn } a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0, \text{ denn } a^0 = 1$$

$$\log_a a^x = x, \text{ denn } a^x = a^x$$

1.3.6.2 Dekadischer und natürlicher Logarithmus

➤ Dekadischer Logarithmus: 10er Logarithmus

- Basis ist immer 10
- $\log_{10}x = \lg x$
- z. B. $\lg 100 = 2$
 $\lg 1000 = 3$

➤ Natürlicher Logarithmus: „logarithmus naturalis“

- Basis ist immer die Eulersche Zahl $e = 2,71828$
- $\log_e x = \ln x$
- z. B. $\log_e 1 = \ln 1 \Leftrightarrow e^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

➤ Verhältnis Potenzieren/Logarithmieren:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$\Rightarrow$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

$\Rightarrow$

$$y = \log_a (a^y)$$

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

➤ Gesetze für Logarithmen:

$$1. \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2. \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$3. \quad \log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$$

➤ Spezialfälle: $\log_a \frac{1}{x} = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

➤ „Logarithmus naturalis“:

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{oder} \quad x = e^{\ln x}$$

$$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$$

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

➤ Wichtig:

$$\log_3 25 = y$$

$$\Leftrightarrow 3^y = 25 \quad (\text{Ziel : nach } y \text{ auflösen!})$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln 3^y} = e^{\ln 25}$$

$$\Leftrightarrow \ln 3^y = \ln 25$$

$$\Leftrightarrow y \cdot \ln 3 = \ln 25$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\ln 25}{\ln 3}$$

➤ Allgemein:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

1.4 Mengen und Abbildungen

1.4.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.4.1.1 Schreibweisen und Darstellungen für Mengen

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

1.4.1.4 Rechengesetze der Mengenalgebra

1.4.1.5 Kartesisches Produkt und Kreuzmenge

1.4.1.6 Element und Teilmenge

1.4.2 Abbildungen

1.4.1.1 Schreibweisen und Darstellungen für Mengen

➤ Definition der Menge (naiver Mengenbegriff):

Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte. Jedes zur Menge gehörige Objekt heißt Element der Menge.

➤ Schreibweisen:

$a \in A$ „a ist Element von A“

$b \notin A$ „b ist nicht Element von A“

➤ Beispiele für Mengen:

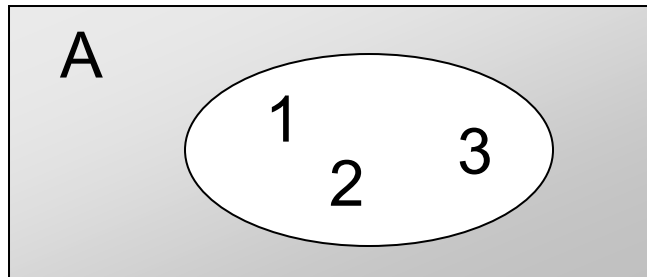
$\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathbb{R}_{> 0}$, $\mathbb{R}_{< 0}$

1.4.1.1 Schreibweisen und Darstellungen von Mengen

➤ Darstellungen:

■ $\mathbb{R}_{\geq 0}$

■ Venn-Diagramm:



■ aufzählend:

z.B. $A := \{ 1, 2, 3 \}$

■ beschreibend:

z.B. $A := \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 4 \}$

■ Zeichen für die **leere Menge**:

$\emptyset, \{ \}$

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

➤ Teilmenge (Obermenge, Untermenge)

- A ist Teilmenge von B, wenn jedes Element aus A auch in der Menge B enthalten ist.
- $A \subset B$: A ist Teilmenge (Untermenge) von B
- $B \supset A$: B ist Obermenge von A

➤ Gleichheit von Mengen

- Zwei Mengen sind gleich, wenn jedes Element aus A auch Element ist aus B und umgekehrt.
- $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

➤ Wichtige Anmerkung:

- Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst:
 $A \subset A$
- Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge.

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

➤ Potenzmenge:

- Die Potenzmenge einer Menge M wird bezeichnet als $P(M)$ und ist die Menge aller Teilmengen von M .

$$P(M) := \{ A \mid A \subset M \}$$

- Beispiel:

$$M := \{ 1, 2, 3 \}$$

$$P(M) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

- Die Potenzmenge enthält **2^n Elemente**, wobei n die Anzahl der Elemente von M ist (also $n = |M|$).

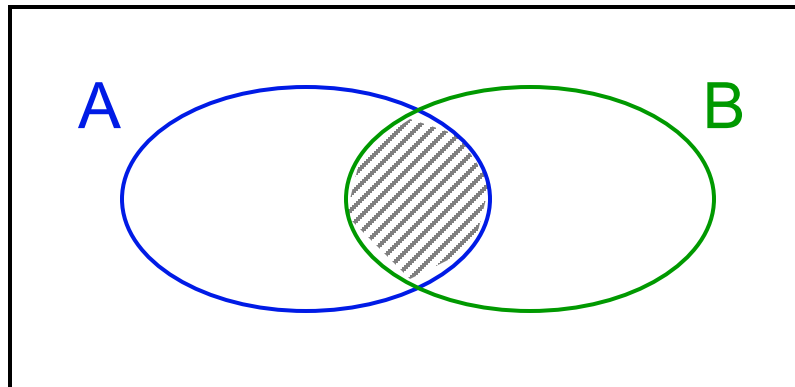
1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Durchschnitt:

- Die Durchschnitts- oder Schnittmenge von zwei Mengen A und B im Zeichen $A \cap B$ ist die Menge der Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

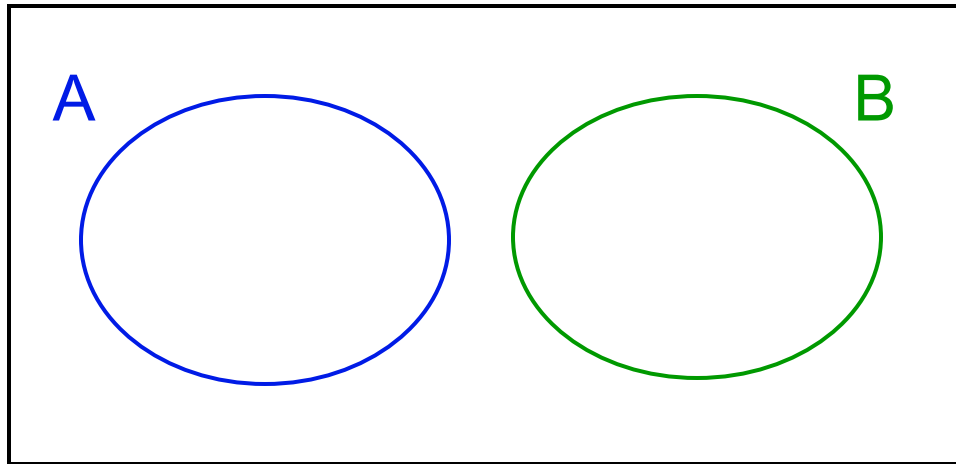
- $A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

- Venn-Diagramm:



1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Wichtig:



A und B heißen elementfremd oder **disjunkt**.

$$A \cap B = \emptyset$$

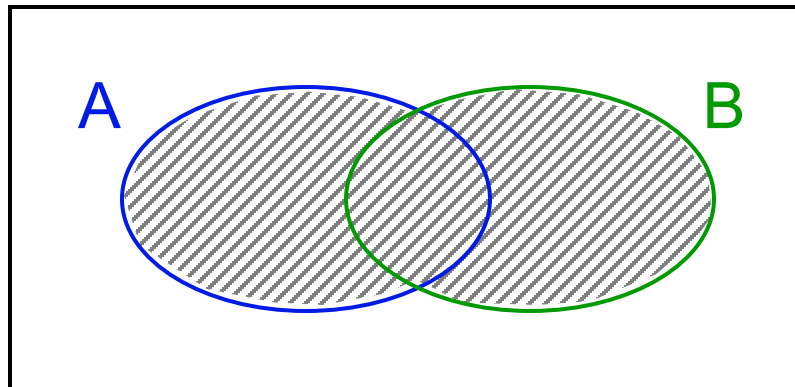
1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Vereinigung:

- Die Vereinigungsmenge von zwei Mengen A und B im Zeichen $A \cup B$ ist die Menge der Elemente, die mindestens in einer Menge, A oder B, liegen.

- $A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

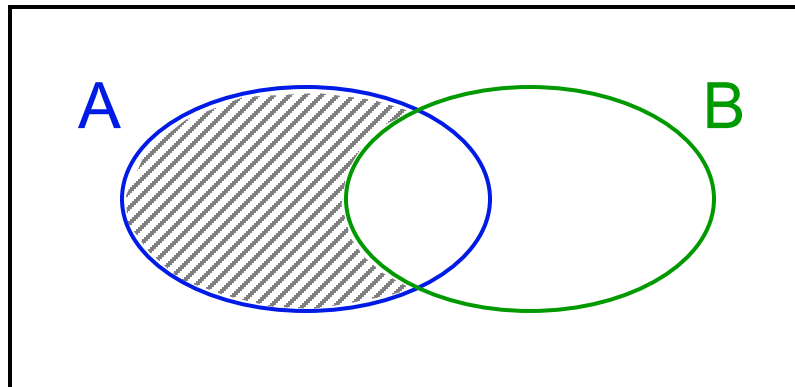
- Venn-Diagramm:



1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Differenz:

- Die Differenz $A \setminus B$ enthält genau die Elemente von A, die nicht Elemente von B sind.
- $A \setminus B := \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- Venn-Diagramm:



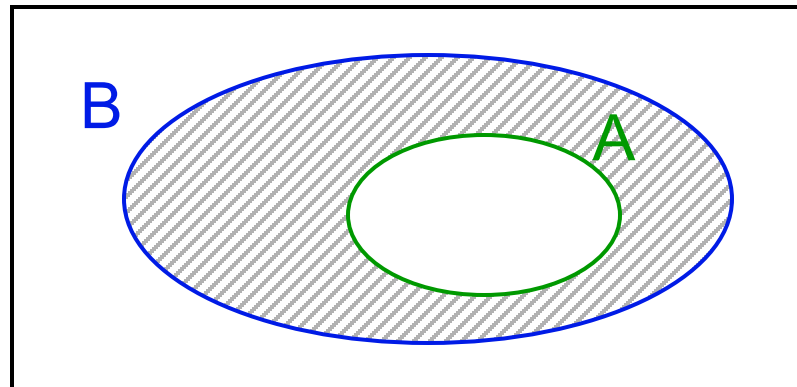
1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Komplement:

- Ist $A \subset B$, so besteht das Komplement von A bezüglich B aus allen Elementen von B, die nicht in A enthalten sind.

- $\bar{A}_B := B \setminus A$

- Venn-Diagramm:



1.4.1.4 Rechengesetze der Mengenalgebra

➤ **Kommutativgesetz:**

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$

➤ **Assoziativgesetz:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

➤ **Distributivgesetz:**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{und} \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

1.4.1.4 Rechengesetze der Mengenalgebra

$$1. \quad A \subset B \quad \Rightarrow \quad \bar{B}_M \subset \bar{A}_M \quad \text{mit } M \supset A \cup B$$

$$2. \quad (\overline{\bar{A}_M})_M = A$$

$$3. \quad (\overline{A \cup B})_M = \bar{A}_M \cap \bar{B}_M \quad \text{und} \quad (\overline{A \cap B})_M = \bar{A}_M \cup \bar{B}_M$$

1.4.1.5 Kartesisches Produkt und Kreuzmenge

➤ n-Tupel:

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$

heißt n-Tupel und

a_i mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ die i-te Komponente des n-Tupels.

➤ Kartesisches Produkt/Kreuzmenge:

Als kartesisches Produkt $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ bezeichnet man die Gesamtheit aller n-Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

$:= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$

1.4.1.5 Kartesisches Produkt und Kreuzmenge

➤ Spezielle kartesische Produkte:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &:= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \\ &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge \dots \wedge x_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

➤ Beispiel:

$$A := \{1, 2, 3\} \text{ und } B := \{4, 5\}$$

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

➤ Wichtig: $A \times B \neq B \times A$

1.4.1.6 Element und Teilmenge

➤ Ausgangspunkt:

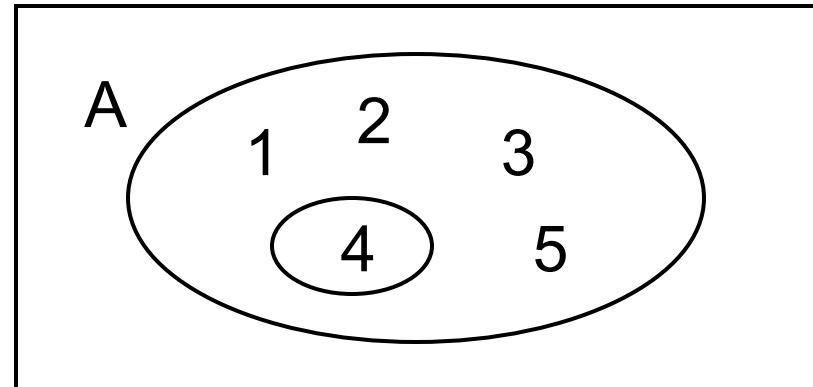
Auch Mengen können Elemente von Mengen sein.

➤ Beispiel:

$$A := \{ 1, 2, 3, \{4\}, 5 \}$$

Sind folgende Aussagen wahr?

$1 \in A$	$\{1\} \subset A$
$2 \in A$	$\{2\} \subset A$
$3 \in A$	$\{3\} \subset A$
$4 \in A$	$\{4\} \subset A$
	$\{\{4\}\} \subset A$



1.4.2 Abbildungen

1.4.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.4.2 Abbildungen

1.4.2.1 Definition und Graph einer Abbildung

1.4.2.2 Bildmenge und Urbildmenge

1.4.2.3 Komposition von Abbildungen

1.4.2.4 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

1.4.2.5 Inverse Abbildung

1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

(Ganzrationale Funktionen, Wurzelfunktionen,
gebrochenrationale Funktionen,
Exponential- und Logarithmusfunktionen)

1.4.2.1 Definition und Graph einer Abbildung

➤ Definition der Abbildung:

- Eine Vorschrift f , die jedem Element x einer Menge A **genau** ein Element y einer Menge B zuordnet, heißt Abbildung von A nach B
- $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y =: f(x)$
- A heißt **Definitionsbereich** von f (D_f)
 B heißt **Wertebereich** von f (W_f)

➤ Graph einer Abbildung:

- Als Graph einer Abbildung f bezeichnet man die Menge
 $\text{graph } f := \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$
- Es gilt:
 $\text{graph } f \subset A \times B$

1.4.2.2 Bildmenge und Urbildmenge

➤ Bildmenge und Urbildmenge:

■ Es gelte: $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y =: f(x)$

■ Weiterhin gelte: $M \subset A$ und $N \subset B$

■ Dann heißen:

$$f[M] := \{ f(x) \mid x \in M \}$$

die **Bildmenge**
von M unter f

$$f^{-1}[N] := \{ x \mid x \in A \wedge f(x) \in N \}$$

die **Urbildmenge**
von N unter f

1.4.2.3 Komposition von Abbildungen

➤ Komposition von Abbildungen

- Es sind: $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y =: f(x)$
 $g : C \rightarrow D$ mit $y \rightarrow z =: g(y)$

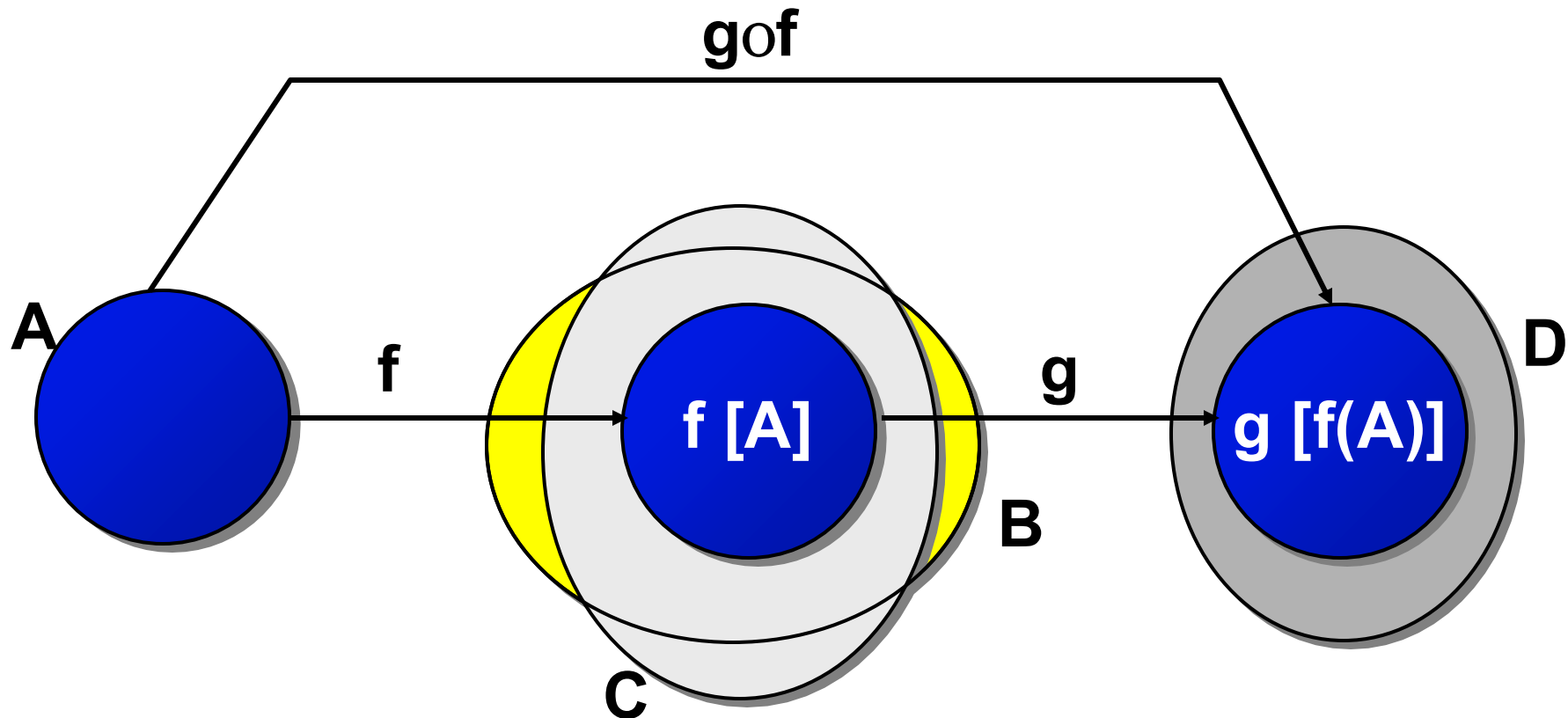
und: $f[A] \subset C$

- So heißt:

$$g \circ f : A \rightarrow D \quad \text{mit} \quad x \rightarrow z = (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Komposition von f und g .

1.4.2.3 Komposition von Abbildungen



1.4.2.3 Komposition von Abbildungen

➤ **Beispiel:**

Es seien

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow y = f(x) := 2 \cdot x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ mit } y \rightarrow z = g(y) := e^y ,$$

so heißt

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ mit } x \rightarrow z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) := e^{2 \cdot x}$$

Komposition von f und g .

➤ **Beispiel:**

Mit

$$g(y) := e^y \quad \text{und} \quad f(x) := 10 \cdot \ln(x) = \ln(x^{10})$$

ist

$$(g \circ f)(x) = g(10 \cdot \ln(x)) = e^{10 \cdot \ln(x)} = e^{\ln(x^{10})} = x^{10}$$

1.4.2.4 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y = f(x)$ heißt

- **injektiv:**

$$:\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$:\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A) (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

$\Rightarrow$ Ein $y \in B$ darf **höchstens** einmal getroffen werden!

- **surjektiv:**

$$:\Leftrightarrow f[A] = B \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\exists x \in A) (f(x) = y)$$

$\Rightarrow$ Jedes $y \in B$ wird **mindestens** einmal getroffen!

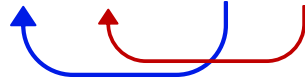
- **bijektiv:**

$$:\Leftrightarrow f \text{ ist injektiv und surjektiv}$$

$\Rightarrow$ Jedes $y \in B$ wird **genau** einmal getroffen!

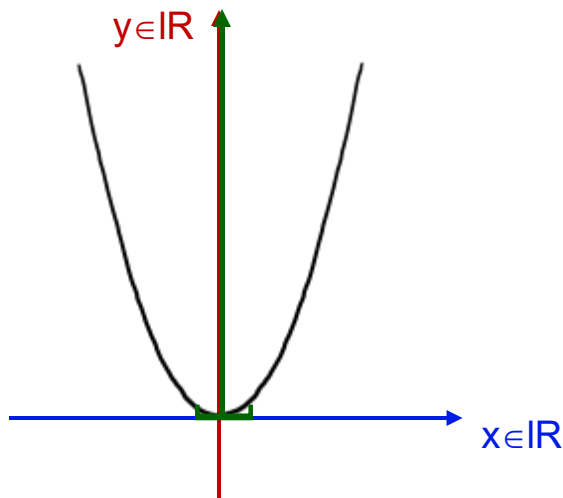
1.4.2.4 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität – Beispiel

Abbildung | Beispiel 1: $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y = f_1(x) := x^2$



Definitionsbereich: $ID = \mathbb{R}$ und
Wertebereich $W = \mathbb{R}$

Eine Abbildung ist eine eindeutige Zuordnung von jedem $x \in ID$ auf ein $y \in W$!

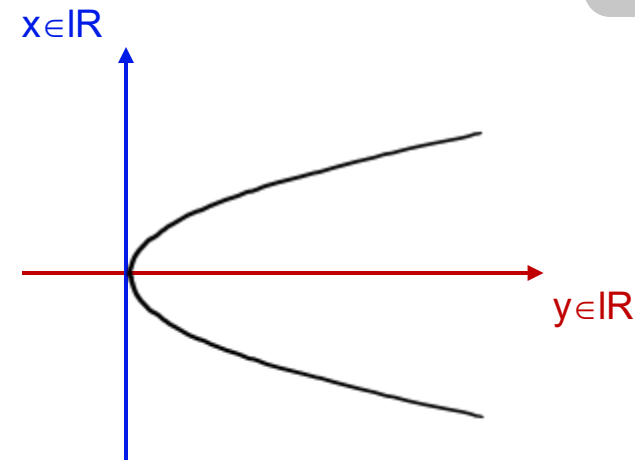


- ⇒ Was ist der Bildbereich $f_1[ID]$? ⇒ $f_1[ID] = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R} = W$
- ⇒ Ist die Abbildung ...
- ... injektiv?
 - ... surjektiv?
 - ... bijektiv?

Würde man $f_1(x)$ umkehren, dann ergäbe sich folgendes Bild:

$$y = x^2$$

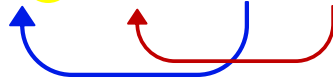
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$$



- ⇒ Handelt es sich bei dieser Umkehrung noch um eine Abbildung?

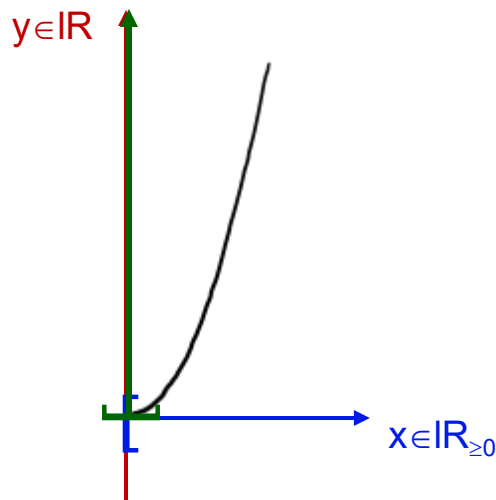
1.4.2.4 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität – Beispiel

Abbildung | Beispiel 2: $f_2: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y = f_2(x) := x^2$



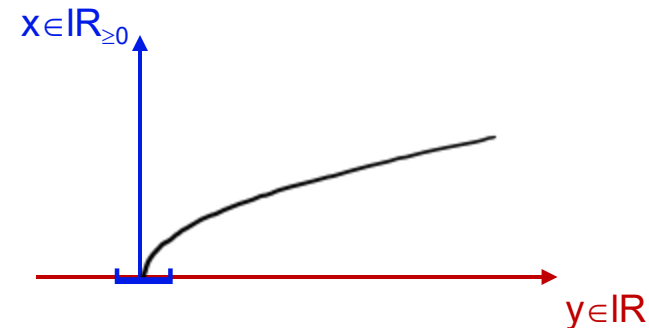
Definitionsbereich: $ID = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und
Wertebereich $W = \mathbb{R}$

Eine Abbildung ist eine eindeutige Zuordnung von jedem $x \in ID$ auf ein $y \in W$!



- ⇒ Was ist der **Bildbereich** $f_2[ID]$? ⇒ $f_2[ID] = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R} = W$
- ⇒ Ist die Abbildung ...
- ... injektiv?
 - ... surjektiv?
 - ... bijektiv?

Würde man $f_2(x)$ umkehren, dann ergäbe sich folgendes Bild:



- ⇒ Handelt es sich bei dieser Umkehrung um eine Abbildung?

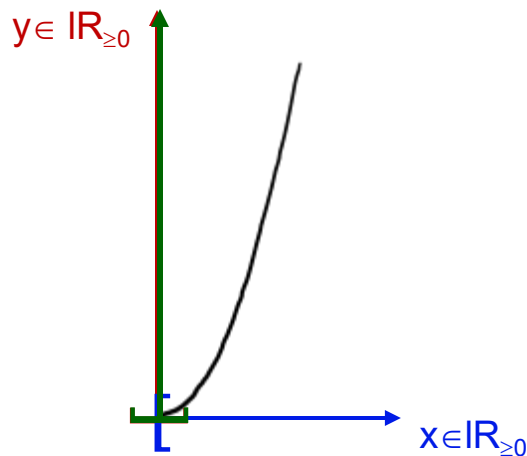
1.4.2.4 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität – Beispiel

Abbildung | Beispiel 3: $f_3: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \mapsto y = f_3(x) := x^2$



Definitionsbereich: $ID = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und
Wertebereich $W = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Eine Abbildung ist eine eindeutige Zuordnung von jedem $x \in ID$ auf ein $y \in W$!

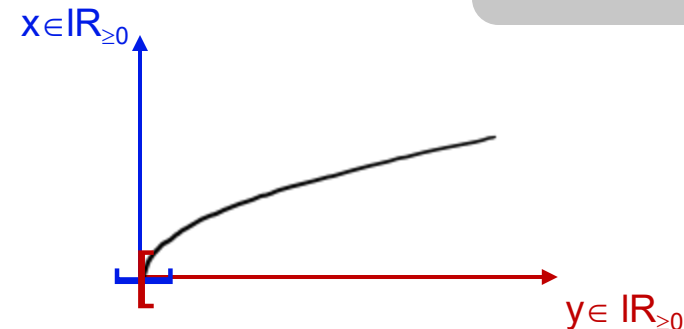


- ⇒ Was ist der Bildbereich $f_3[ID]$? ⇒ $f_3[ID] = \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} = W$
- ⇒ Ist die Abbildung ...
 - ... injektiv?
 - ... surjektiv?
 - ... bijektiv?

Kehrt man $f_3(x)$ um, dann ergibt sich folgendes Bild:

$$y = f_3(x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = f_3^{-1}(y) = +\sqrt{y}$$



- ⇒ Handelt es sich bei dieser Umkehrung jetzt um eine Abbildung?
- ⇒ Ist diese ...
 - ... injektiv?
 - ... surjektiv?
 - ... bijektiv?

1.4.2.5 Inverse Abbildung

➤ Inverse Abbildung oder Umkehrabbildung:

Die zu einer bijektiven Abbildung

$$f : A \rightarrow B \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x)$$

inverse Abbildung (oder Umkehrabbildung)

ist die eindeutig bestimmte bijektive Abbildung

$$f^{-1} : B \rightarrow A \quad \text{mit} \quad y \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

mit der Eigenschaft:

$$(\forall x \in A, y \in B) \quad (x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y)$$

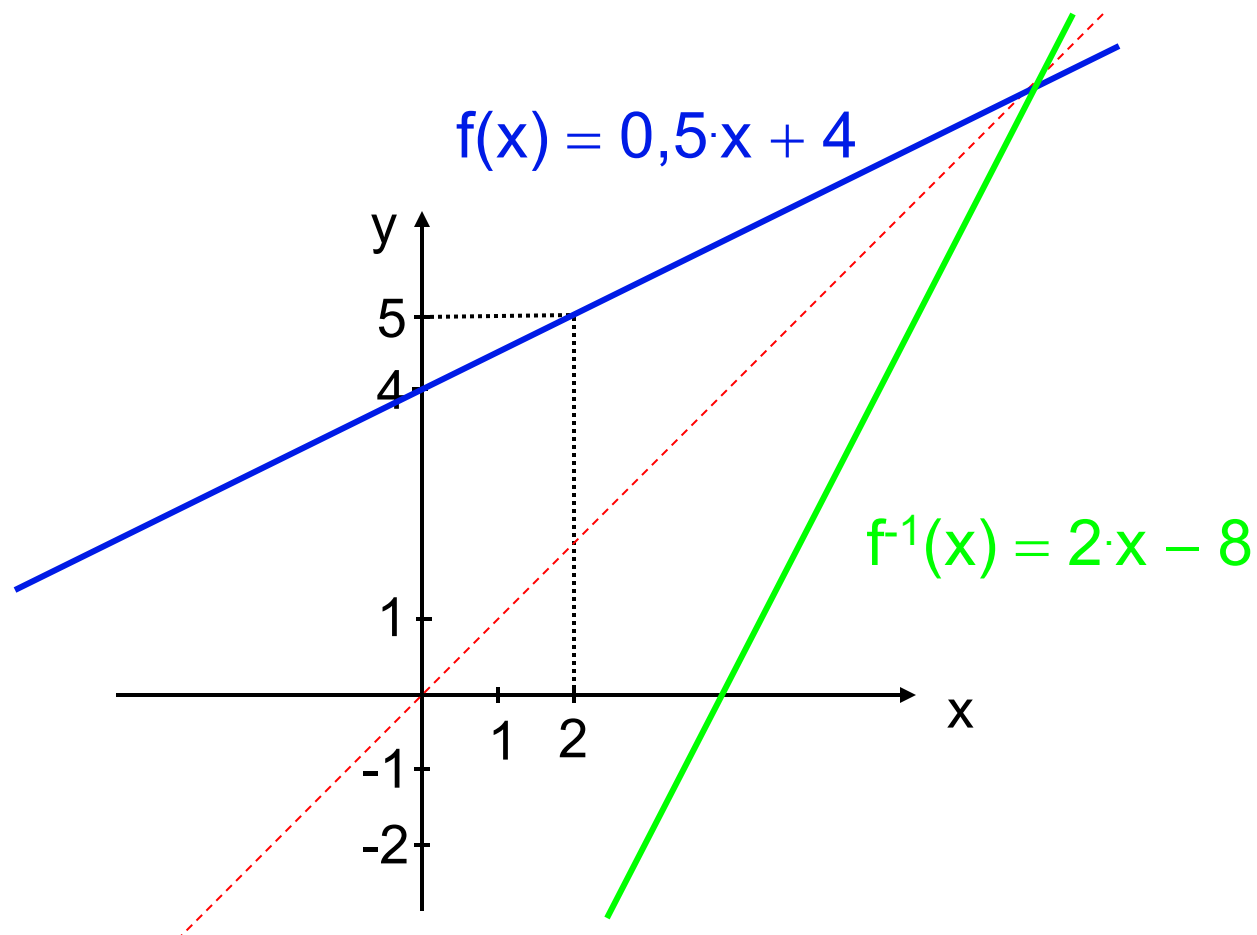
➤ Die zu einer bijektiven Abbildung gehörige inverse Abbildung ist also ebenfalls bijektiv.

1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

Funktionstyp	Beispiel
Lineare Funktionen	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = 0,5 \cdot x + 4$
Quadratische Funktionen	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = x^2$
Kubische Funktionen	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = x^3$
Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x+2)$
Wurzelfunktionen	$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \sqrt{x}$ $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \sqrt[3]{x}$
Gebrochenrationale Funktionen	$f : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \frac{1}{x}$
Exponentialfunktion	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = e^x$
Logarithmusfunktion	$f : \mathbb{R}_{> 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \ln x$

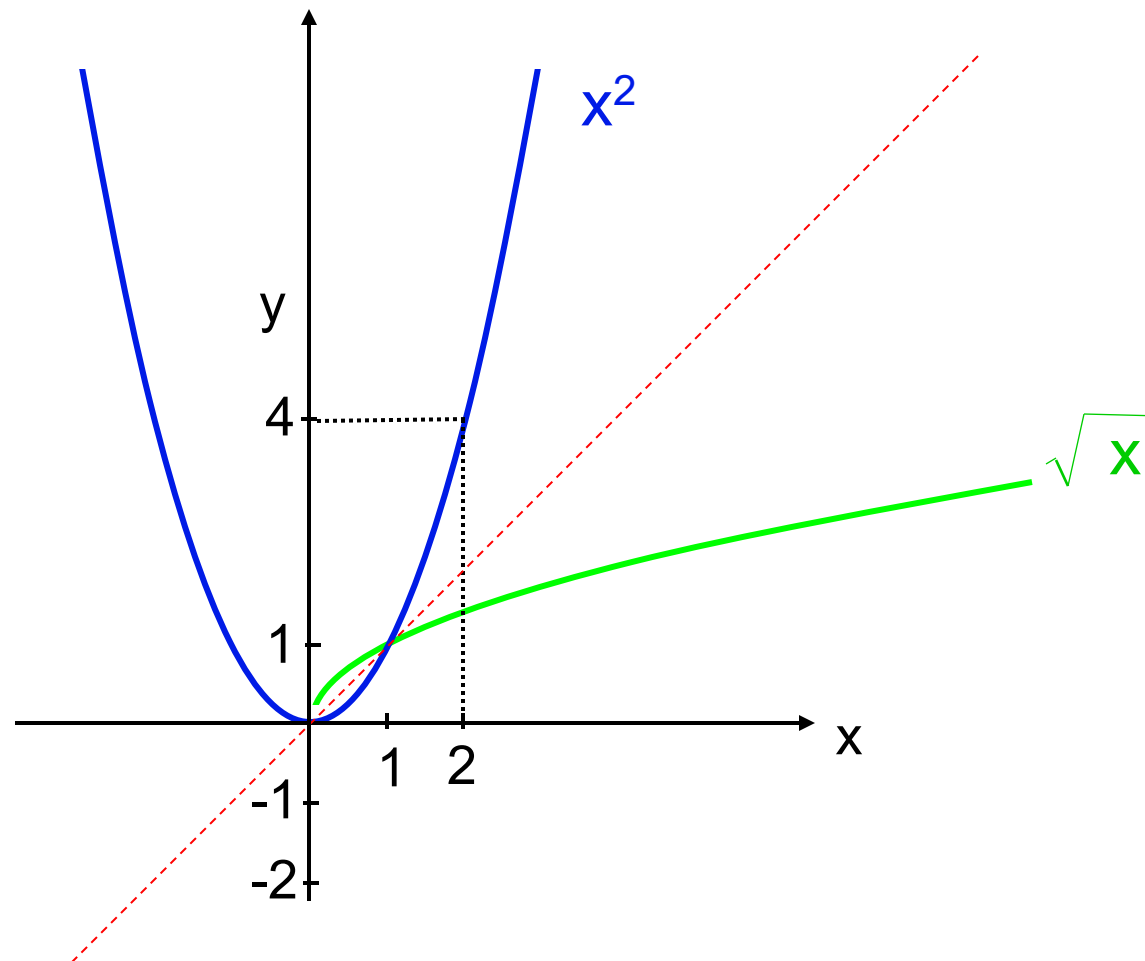
1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

Graph einer linearen Funktion und ihrer Umkehrfunktion



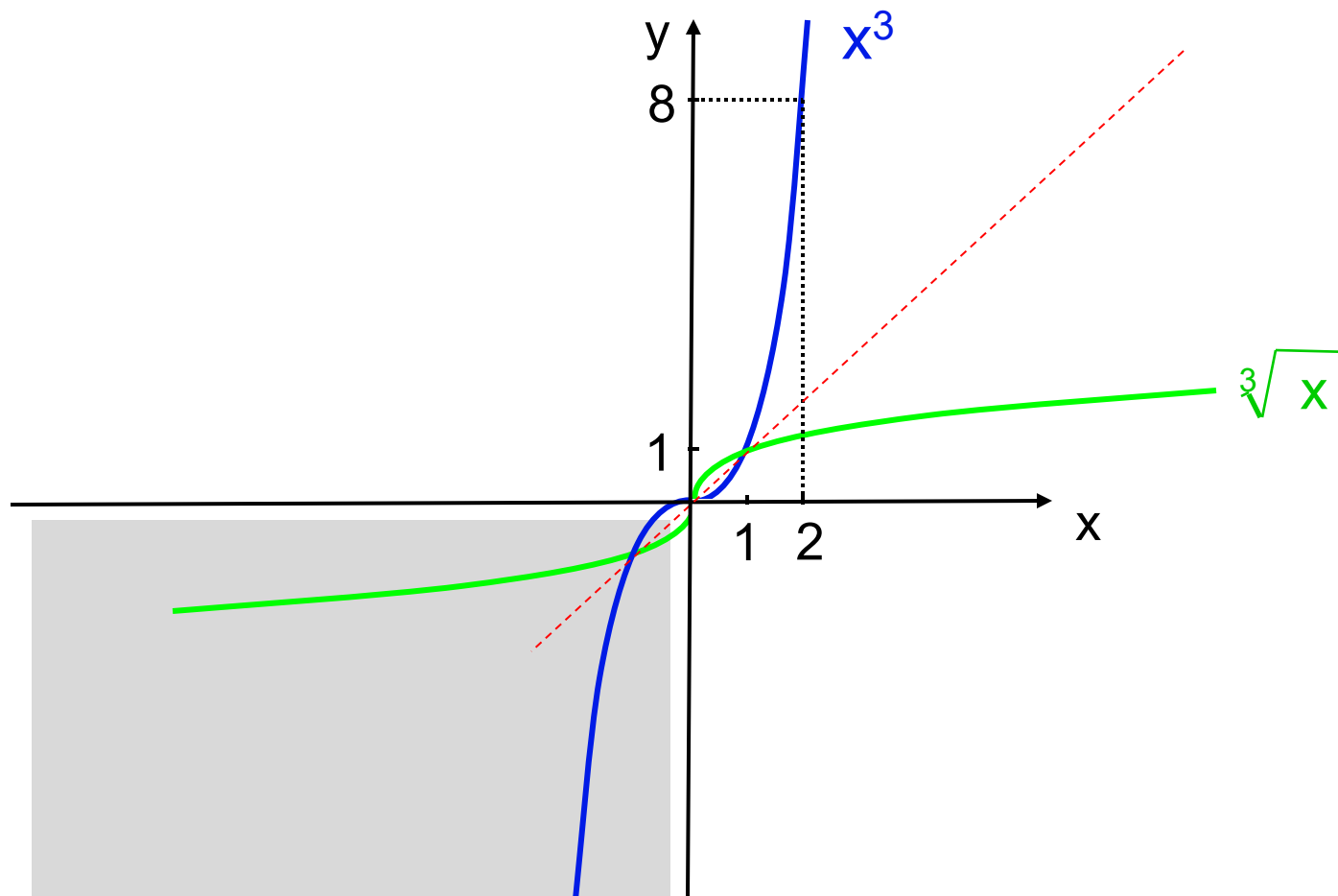
1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

Graph einer quadratischen Funktion und einer (Quadrat-)Wurzelfunktion



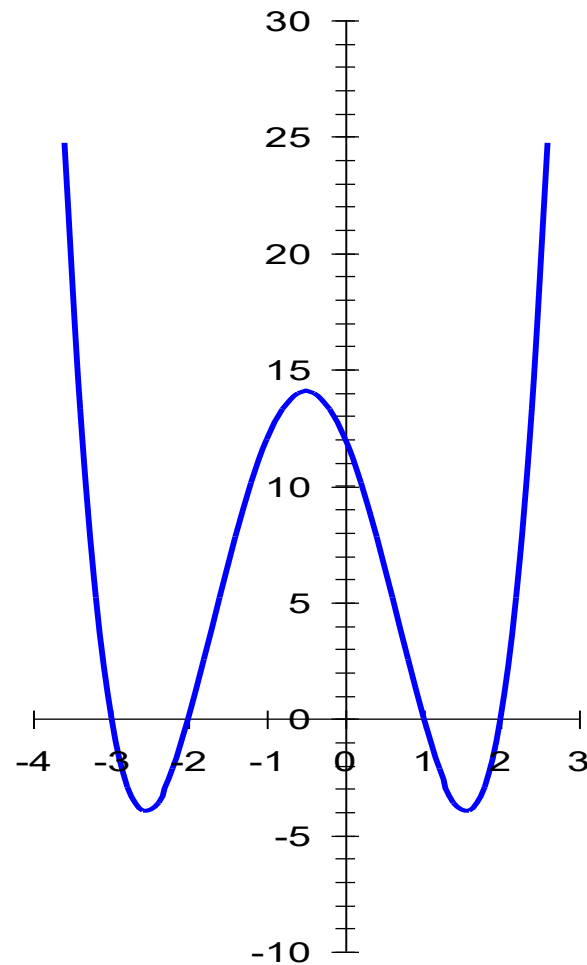
1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

Graph einer kubischen Funktion und einer (Kubik)-Wurzelfunktion



1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

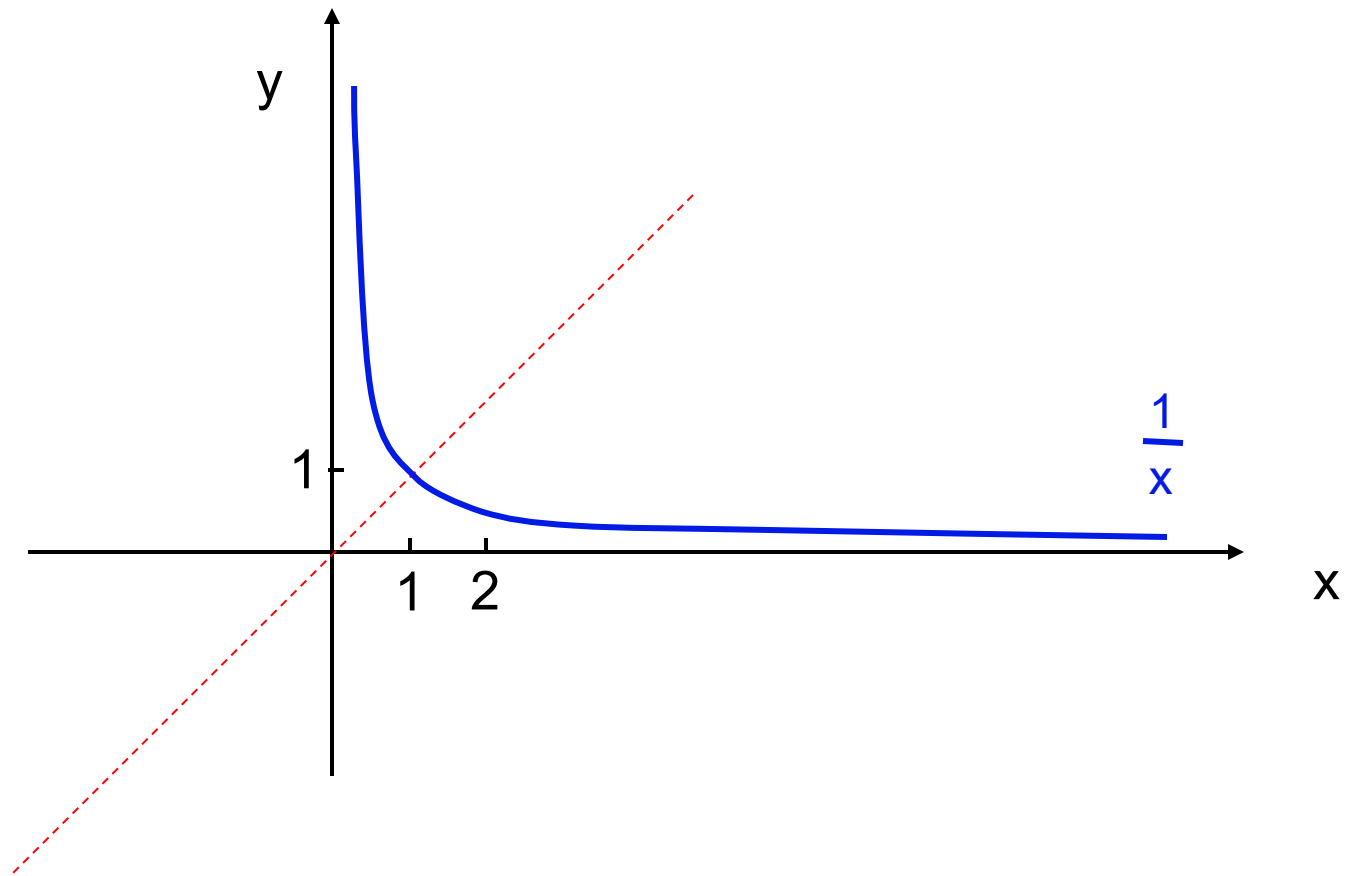
Graph einer ganzrationalen Funktion höherer Ordnung (Polynom)



$$f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x+2)$$

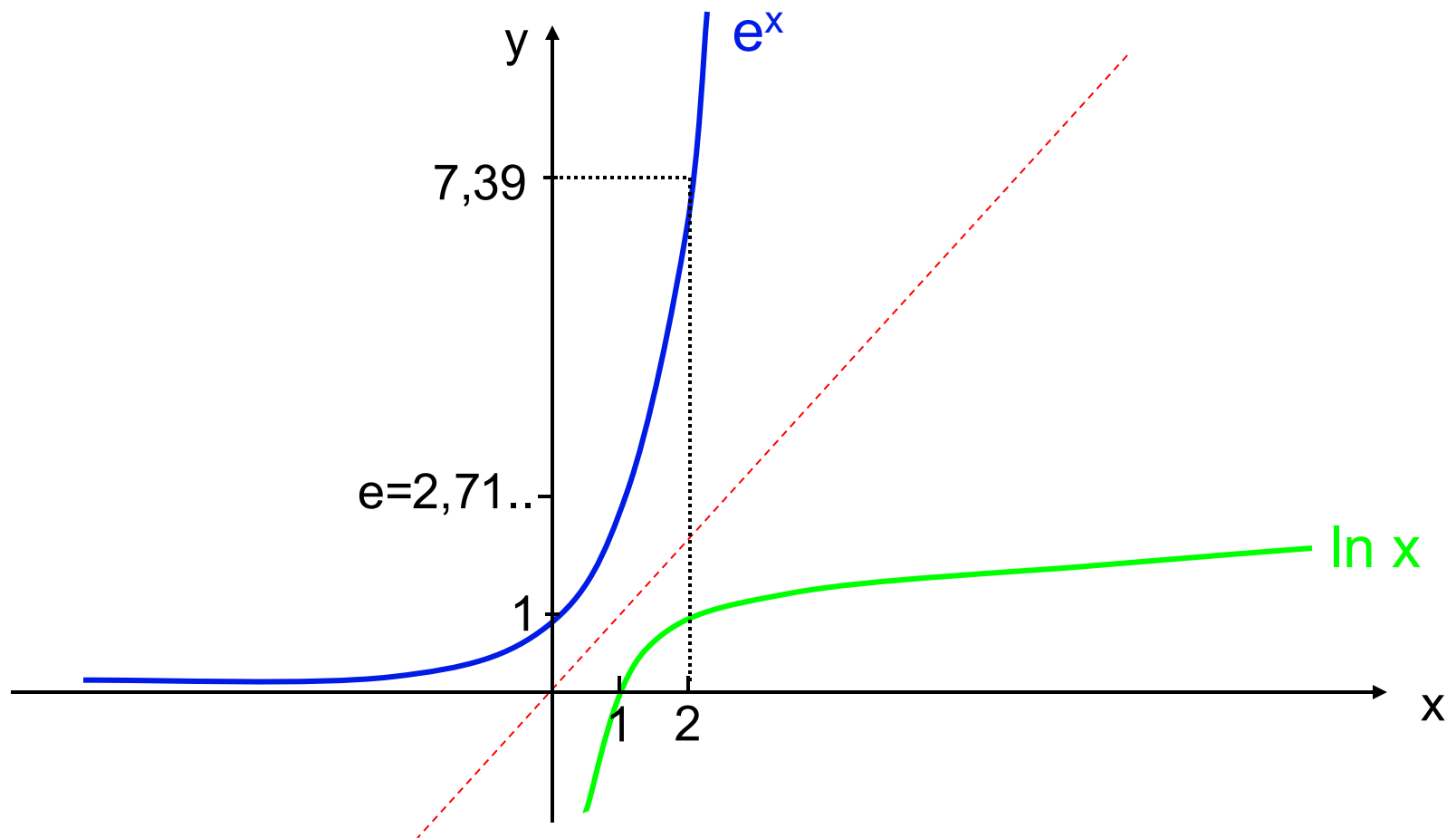
1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

Graph einer gebrochenrationalen Funktion



1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

Graph einer Exponentialfunktion und einer Logarithmusfunktion



1.5 Lösung von Gleichungen in einer Variablen

1.5.1	Lineare Gleichungen	$a \cdot x = b$, z.B. $8 \cdot x = 32$
1.5.2	Quadratische Gleichungen	Satz von Vieta (pq-Formel)
1.5.3	Gleichungen mit Quotienten	z.B. $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-3}{x-5}$
1.5.4	Wurzelgleichungen	z.B. $2 \cdot \sqrt{5-x} = 3 \cdot \sqrt{8+x}$
1.5.5	Potenzgleichungen	$x^a = b \Leftrightarrow x = \sqrt[a]{b}$
1.5.6	Exponential- und Logarithmengleichungen	$a^x = b$ oder $\log_a x = c$
1.5.7	Biquadratische Gleichungen	$ax^4 + bx^2 + c = 0$
1.5.8 a)	Homogene Gleichungen höherer Ordnung	z.B. $x^5 - 7x^4 + 6x^3 = 0$
1.5.8 b)	Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung	z.B. $4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 - 52 \cdot x = -60$

1.5.2 Quadratische Gleichungen

➤ Allgemeine Form: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a \neq 0$

➤ Normalform:

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_p \cdot x + \underbrace{\frac{c}{a}}_q = 0$$
$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

➤ Satz von Vieta:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.5.3 Gleichungen mit Quotienten

➤ Generelle Vorgehensweise:

⇒ Gleichung mit Nenner multiplizieren, dann vereinfachen

➤ Gleichungen mit Quotienten bestehend aus Linearfaktoren:

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-c}{x-d}$$

$$\Leftrightarrow (x-a) \cdot (x-d) = (x-c) \cdot (x-b)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+d) \cdot x + a \cdot d = x^2 - (b+c) \cdot x + b \cdot c$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a-d) \cdot x = b \cdot c - a \cdot d$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{(b+c-a-d)}$$

1.5.4 Wurzelgleichungen

➤ Kennzeichen:

⇒ Variable steht (u.a.) innerhalb der Wurzelausdrücke

➤ Generelle Vorgehensweise:

⇒ ggfs. Wurzelausdrücke auf einer Seite isolieren

⇒ anschließend Wurzeln durch Potenzieren beseitigen
(bei Quadratwurzeln also quadrieren!)

⇒ *Beachte:*

Das Potenzieren beider Seiten einer Gleichung ist eine beschränkt erlaubte Äquivalenzumformung! Die „neue“ Gleichung kann Lösungen enthalten, die nicht zur Lösungsmenge der Ausgangsgleichung gehören. Die ermittelten Lösungen sind also wieder in die Ausgangsgleichung einzusetzen und auf Richtigkeit zu überprüfen!

1.5.4 Wurzelgleichungen

➤ Beispiel:

$$\sqrt{6 \cdot x + 16} + 5 = x + 5 \quad \text{mit} \quad x \geq -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6 \cdot x + 16} = x$$

Achtung: Linke Seite ist positiv!
Damit ist auch x positiv!

$$\Rightarrow 6 \cdot x + 16 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6 \cdot x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm \sqrt{25}$$

$$x_1 = 3 + 5 = 8 \quad \text{und} \quad x_2 = 3 - 5 = -2$$

x darf aber nicht negativ sein, s. o.

Probe: Einsetzen in die Ausgangsgleichung

$$x_1 = 8: \quad \sqrt{6 \cdot 8 + 16} + 5 = 8 + 5$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$x_2 = -2: \quad \sqrt{6 \cdot (-2) + 16} + 5 = -2 + 5$$

$$\sqrt{4} = -2$$

Für x_2 muss die Probe somit nicht mehr gemacht werden.

Nachtrag zu Wurzeln

Eindeutigkeit von Wurzeln aus positiven Zahlen

- Obwohl bei geradzahligen Wurzelexponenten und positiven Radikanden zwei Lösungen mit unterschiedlichen Vorzeichen existieren, steht die Schreibweise mit dem Wurzelzeichen grundsätzlich für die positive Lösung.

- *Beispiel:* $x^2 = 4$
Lösungen (allgemein): $x = 2$ und $x = -2$.

Aber: $\sqrt{4} = 2$

Der Wurzel-Term hat den Wert 2 und *nicht* den Wert -2 .

1.5.7 Biquadratische Gleichungen

➤ Allgemein: $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$
 ↓
 maximal 4 Lösungen

➤ Lösungsverfahren (per Substitution):

1. Schritt: Setze statt x^2 den Term z , d.h.

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

2. Schritt: Löse die quadratische Gleichung
Für z erhält man maximal 2 Lösungen

3. Schritt: Bestimme x durch Lösen der Gleichung $x^2 = z$

1.5.8 Gleichungen höherer Ordnung

➤ Homogene Gleichungen höherer Ordnung:

■ Kennzeichen:

⇒ Absolutglied ist gleich null.

■ Vorgehensweise:

⇒ zunächst x mit der niedrigsten Potenz ausklammern

⇒ anschließend Zerlegung in Linearfaktoren

■ Beispiel:

$$\begin{aligned} x^5 - 7 \cdot x^4 + 6 \cdot x^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 \cdot \underbrace{(x^2 - 7 \cdot x + 6)}_{\text{pq-Formel}} &= 0 \end{aligned}$$

1.5.8 Gleichungen höherer Ordnung

➤ Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung:

■ Kennzeichen:

⇒ Absolutglied ist ungleich null.

■ Vorgehensweise:

⇒ Zerlegung in Linearfaktoren
bspw. mit Hilfe der Polynomdivision

⇒ Cardanische Formeln (hier nicht)

■ Beispiel:

$$4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 - 52 \cdot x + 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) \cdot (x + 3) = 0$$

1.5.8 Gleichungen höherer Ordnung

➤ Beispiel für eine Polynomdivision:

1. Erraten einer Nullstelle durch Ausprobieren (hier 1)

$$\begin{array}{r}
 2. \quad (x^3 - 3 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 15) : (x - 1) = x^2 - 2 \cdot x - 15 \\
 \underline{-(x^3 - 1 \cdot x^2)} \\
 \quad -2 \cdot x^2 - 13 \cdot x \\
 \quad \underline{-(-2 \cdot x^2 + 2 \cdot x)} \\
 \quad \quad -15 \cdot x + 15 \\
 \quad \quad \underline{-(-15 \cdot x + 15)} \\
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

3. Erraten einer Nullstelle des verbleibenden Terms ($x^2 - 2x - 15$) bzw. Anwenden der pq-Formel usw.

1.6 Ungleichungen

1.6.1 Rechenregeln

1.6.2 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

1.6.1 Rechenregeln

➤ Multiplikation mit Zahlen

für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a < b \quad \wedge \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

$$a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c$$

➤ Kehrwertbildung

für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

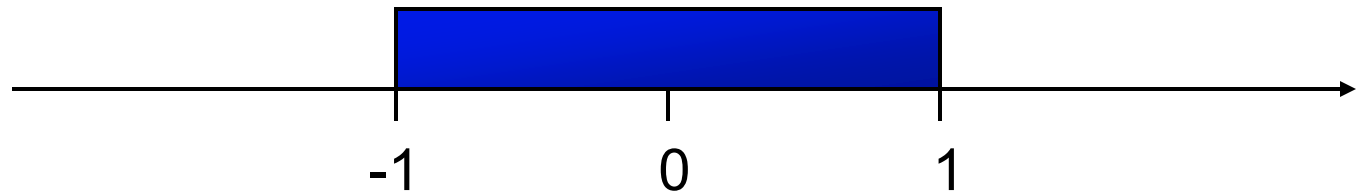
$$a < b \quad \wedge \quad a \cdot b > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < b \quad \wedge \quad a \cdot b < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

1.6.2 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

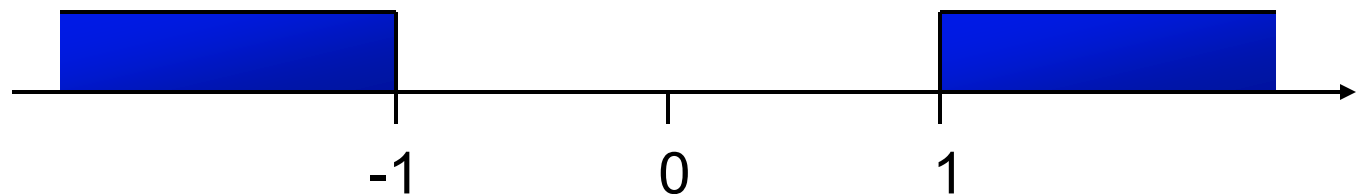
Beispiel 1:

$$|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \quad \text{und} \quad x < 1$$



Beispiel 2:

$$|x| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \quad \text{oder} \quad x > 1$$



1.7 Das Summen- und das Produktzeichen

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

1.7.2 Das Produktzeichen und seine Rechenregeln

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

➤ Das Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

i : heißt Summationsindex

a_i : heißen Summationsvariablen

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

➤ Rechenregeln für das Summenzeichen:

■ Multiplikation mit einer Konstanten c:

$$\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

■ Additions- und Subtraktionsregel:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

■ Addition einer Konstanten c:

$$\sum_{i=1}^n (c + a_i) = \sum_{i=1}^n c + \sum_{i=1}^n a_i = n \cdot c + \sum_{i=1}^n a_i$$

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

➤ Doppelsummen:

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
i=2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
i=3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij} &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ &\quad + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ &\quad + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}\end{aligned}$$

1.7.2 Das Produktzeichen und seine Rechenregeln

➤ Das Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

➤ Rechenregeln für das Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^n c \cdot a_i = c^n \cdot \prod_{i=1}^n a_i \quad \text{für } c = \text{const.}$$

$$\prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$$

$$\prod_{i=1}^n a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2$$

Jetzt folgt Kapitel 2:

Lineare Algebra

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615