



IB&M

Wirtschaftsmathematik

(Analysis/Lineare Algebra)

Prof. Dr. Michael Bücker

Prof. Dr. Michael Bücker

Corrensstrasse 25
48149 Münster

www.fh-muenster.de/FB9



Ergänzung zur Formelsammlung

Prof. Dr. Michael Bücker

**Corrensstrasse 25
48149 Münster**

www.fh-muenster.de/FB9

Gliederung

- 1 Mathematisches Grundwissen
- 2 Lineare Algebra
- 3 Folgen, Reihen und Grenzwerte
- 4 Funktionen
- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
- 6 Integralrechnung
- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Gliederung

1 Mathematisches Grundwissen

1.1 Begriffe und Symbole

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

1.3 Rechenregeln für reelle Zahlen

1.4 Mengen und Abbildungen

1.5 Lösung von Gleichungen in einer Variablen

1.6 Ungleichungen

1.7 Das Summen- und das Produktzeichen

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Gleichheit und Ungleichheit

$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$<$	„ist kleiner als“
$\leq$	„ist kleiner oder gleich“
$>$	„ist größer als“
$\geq$	„ist größer oder gleich“
$\approx$	ungefähr gleich
$:=$	„ist definiert als“
$\Rightarrow$	„daraus folgt“ bzw. „wenn, dann“
$\Leftrightarrow$	„ist äquivalent“ bzw. „genau dann, wenn“
$:\Leftrightarrow$	„definitionsgemäß genau dann, wenn“

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Logische Verknüpfungen:

$A \wedge B$ „A und B“
 $\Rightarrow$ sowohl A als auch B

$A \vee B$ „A oder B“ (lat.: vel)
 $\Rightarrow$ entweder A oder B oder beides gleichzeitig)

➤ Verknüpfungen von Mengen

$\setminus$ „ohne“

$\cap$ „geschnitten mit“

$\cup$ „vereinigt mit“

$\in$ „ist Element“

$\notin$ „ist nicht Element“

$\subset$ „ist Teilmenge von“

$\supset$ „ist Obermenge von“

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Weitere Zeichen:

$\forall$ „für alle“, z. B. $M := \{ 1, 2 \}$
 $(\forall x \in M) (x > 0)$ „Für alle $x \in M$ gilt, x ist größer 0.“

$\exists$ „... es existiert ein ...“, z.B. $M = \{ -1, 2, 3 \}$
 $(\exists x \in M) (x < 0)$ „Es existiert ein $x \in M$, für das gilt, x ist größer 0.“

$|M|$ Anzahl der Elemente einer Menge, z.B. $M = \{ 1, 2 \}$
 $|M| = 2$

nicht zu verwechseln mit:

$|z|$ Betrag einer Zahl

$$|z| = \begin{cases} +z & \text{für } z \geq 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Konstante

π	Pi = 3,14159... (Verhältnis Kreisumfang zum Durchmesser)
e	Eulersche Zahl $e = 2,71828...$ (kont. Wachstumsfaktor)

➤ Algebra und Elemente der Analysis

$ z $	Betrag von z (absoluter Wert einer reellen Zahl)
$n!$	n Fakultät ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$)
Σ	Summenzeichen
Π	Produktzeichen
$\sqrt{\quad}$; $\sqrt[n]{\quad}$	Quadratwurzel aus, n -te Wurtzel aus
$dx, \partial x$	Differential (unendlich kleines Stück in x -Richtung)
$\det$	Determinante
$\vec{x}, \mathbf{x}$	Vektor

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Grenzwerte

∞	unendlich
$\rightarrow$	„nähert sich“, „strebt nach“
$\lim$	Limes (Grenzwert)

➤ Exponential- und Logarithmusfunktion

e^x, a^x	Exponentialfunktion zur Basis e oder allgemein zur Basis a
$\log_a$	Logarithmus zur Basis a
$\lg$	Dekadischer Logarithmus (Zehnerlogarithmus)
$\ln$	natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis e)

1.1 Begriffe und Symbole

➤ Das griechische Alphabet:

Aα	Alpha	Iι	Iota	Pρ	Rho
Bβ	Beta	Kκ	Kappa	Σσ	Sigma
Γγ	Gamma	Λλ	Lambda	Tτ	Tau
Δδ	Delta	Mμ	My	Υυ	Ypsion
Eε	Epsilon	Nν	Ny	Φφ	Phi
Zζ	Zeta	Ξξ	Xi	Xχ	Chi
Hη	Eta	Oο	Omikron	Ψψ	Psi
Θθ	Theta	Ππ	Pi	Ωω	Omega

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

Komplexe Zahlen

Reelle Zahlen

Rationale Zahlen

Ganze Zahlen

**Natür-
liche
Zahlen**

null

**negative
ganze
Zahlen**

**endliche
und
unendlich
periodische
Brüche**

**irrationale
Zahlen**

**imaginäre
Zahlen**

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

$\mathbb{IN}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\{1; 2; 3; 4; \dots\}$
$\mathbb{IN}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null	$\{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	Menge aller als Bruch ganzer Zahlen darstellbarer Zahlen
$\mathbb{IR}$	Menge der reellen Zahlen	zusätzlich zu $\mathbb{Q}$ sind alle irrationalen Zahlen ($e, \pi, \sqrt{2}, \dots$) enthalten
$\mathbb{IR}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen	$\{x \mid x \in \mathbb{IR} \wedge x > 0\}$
$\mathbb{IR}_0^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\{x \mid x \in \mathbb{IR} \wedge x \geq 0\}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	zusätzlich zu $\mathbb{IR}$ sind auch alle Wurzeln aus negativen Zahlen (imaginäre Zahlen) enthalten

1.2 Zahlensysteme und Zahlenintervalle

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

Bezeichnung	Darstellung	Bedeutung
abgeschlossenes Intervall	$a \leq x \leq b$ [a; b]	Menge aller reellen Zahlen zwischen einschließlich a und b
offenes Intervall	$a < x < b$] a; b [	Menge aller reellen Zahlen zwischen ausschließlich a und b
halboffenes Intervall	$a \leq x < b$ [a; b [	Menge aller reellen Zahlen zwischen einschließlich a und ausschließlich b

1.3 Rechenregeln für reelle Zahlen

1.3 Rechenregeln für reelle Zahlen

- 1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)
- 1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln
- 1.3.3 Addition und Subtraktion von Brüchen
- 1.3.4 Absoluter Betrag (Absolutbetrag)
- 1.3.5 Potenzen und Wurzeln
- 1.3.6 Logarithmen

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

➤ Grundgesetze (Axiome):

■ Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation:

$$\Rightarrow a + b = b + a \quad \text{z.B. } 2 + 3 = 3 + 2 = 5$$

$$\Rightarrow a \cdot b = b \cdot a \quad \text{z.B. } 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$$

■ Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation:

$$\Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{z.B. } (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$$

$$\Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{z.B. } (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$$

■ Distributivgesetze (Verknüpfung von Addition und Multiplikation)

$$\Rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{z.B. } 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14$$

$$\Rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{z.B. } (2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 25$$

1.3.1 Grundrechenarten und Grundgesetze (Axiome)

➤ Elementare Rechenregeln für Vorzeichen:

- $-(-a) = +a = a$
.
- $-(ab) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$
„Minus mal Plus ergibt Minus“
- $(-a)(-b) = ab$
„Minus mal Minus ergibt Plus“

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Binomische Formeln:

1. Binomische Formel:

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel:

$$(a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Exkurs: Potenzen von Binomen (Vorgriff auf Kapitel 1.3.5)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) \\ &= a^2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot b \cdot a + b^2 \cdot a + a^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b + b^2 \cdot b \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

1.3.2 Klammerausdrücke und Binomische Formeln

➤ Exkurs: Potenzen von Binomen (Vorgriff auf Kapitel 1.3.5)

⇒ Pascalsches Dreieck

= Gesetzmäßigkeit der Vorzahlen
durch ihre Anordnung in einem Dreieck

$(a + b)^0$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1.3.3.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

➤ Erweitern von Brüchen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

z.B. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

➤ Kürzen von Brüchen:

$$\frac{a : d}{b : d} = \frac{a}{b}$$

z.B. $\frac{24 : 3}{9 : 3} = \frac{8}{3}$

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y) \cdot (x - y)}{x - y} = x + y$$

In beiden Fällen ändert sich der Wert des Bruches nicht!

1.3.3.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

➤ Vorgehensweise zur Addition bzw. Subtraktion:

- ⇒ zunächst Nenner gleichnamig machen (Hauptnenner bestimmen, also Suche nach dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen)
- ⇒ anschließend Zähler addieren bzw. subtrahieren

➤ Allgemein:

$$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

1.3.3.3 Multiplikation und Division von Brüchen

➤ Multiplikation von Brüchen:

■ Vorgehensweise:

⇒ jeweils Zähler und Nenner miteinander multiplizieren

■ Allgemein:

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

1.3.3.3 Multiplikation und Division von Brüchen

➤ Division zweier Brüche:

■ Vorgehensweise:

⇒ Der erste Bruch wird mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

■ Allgemein:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1.3.4.1 Der Begriff des Absolutbetrags

➤ Absolutbetrag:

⇒ Betrag einer reellen Zahl

⇒ Abstand dieser Zahl auf der Zahlengerade von Null

⇒ Definition:

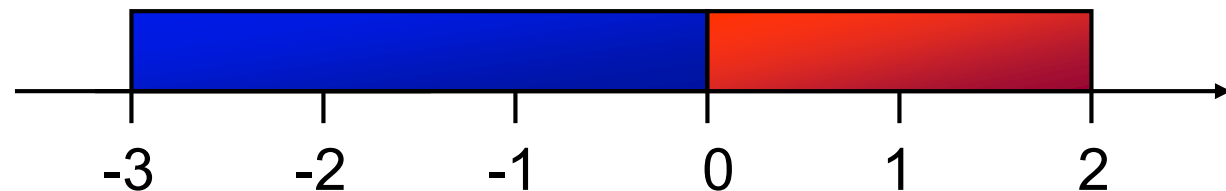
$$|z| = \begin{cases} +z & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

⇒ Beispiele:

$$|-3| = 3 \quad \text{oder} \quad |2| = 2$$

**Abstand
= 3 Einheiten**

**Abstand
= 2 Einheiten**



1.3.4.2 Regeln für das Rechnen mit Absolutbeträgen

Regeln:

$$1. \quad |-a| = |a|$$

$$2. \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$3. \quad |a + b| \geq ||a| - |b||$$

$$4. \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$5. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Beispiele:

$$|-3| = |3| = 3$$

$$|-2 + 5| \leq |-2| + |5|$$

denn $3 < 7$

$$|-2 - 5| \geq ||-2| - |-5||$$

denn $7 \geq 3$

$$|-3 \cdot 4| = |-3| \cdot |4| = 12$$

$$\left| \frac{-8}{4} \right| = \frac{|-8|}{|4|} = 2$$

1.3.5.1 Der Potenzbegriff, Vorzeichenregeln und Potenzgesetze

➤ Der Potenzbegriff:

⇒ Das n-fache Produkt einer Zahl mit sich selbst ergibt die n-te-Potenz dieser Zahl.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n - \text{mal}} = a^n = b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

a: heißt Basis

n: heißt Exponent

b: heißt Potenzwert

1.3.5.1 Der Potenzbegriff, Vorzeichenregeln und Potenzgesetze

➤ Es gilt:

$$a^1 = a$$

$$1^1 = 1$$

$$a^0 := 1$$

$$0^n = 0 \quad \text{mit } n \neq 0$$

➤ Vorzeichenregeln:

$$(-a)^{2n} = (+a)^{2n} \quad \Rightarrow \text{gerader Exponent}$$

$$(-a)^{2n+1} \neq (+a)^{2n+1} \quad \Rightarrow \text{ungerader Exponent}$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad \text{mit } a \neq 0$$

1.3.5.1 Der Potenzbegriff, Vorzeichenregeln und Potenzgesetze

➤ Die Potenzgesetze:

$$1. \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$3. \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$4. \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

1.3.5.2 Der Wurzelbegriff, Vorzeichenregeln und Wurzelgesetze

➤ Wurzeln:

- Die „erste“ Umkehrung der Potenzierung ist das Wurzelziehen.
- Wurzelziehen = Radizieren

$$a^n = b$$

$$a = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b^1} =: b^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$$

n: heißt Wurzelexponent,
b: heißt Radikand

für $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Vorsicht: Bei ungeradem Wurzelexponenten gibt es für $b \in \mathbb{R}_{< 0}$ Konsistenzprobleme mit den Rechengesetzen.

1.3.5.2 Der Wurzelbegriff, Vorzeichenregeln und Wurzelgesetze

➤ Vorzeichen:

⇒ Wird $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gesetzt, so ist die Wurzel $\sqrt[n]{b}$ immer positiv!

➤ Rechenregeln:

Für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$1. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$2. \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$3. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

1.3.6.1 Der Begriff des Logarithmus

➤ Die **Logarithmierung** ist die 2. Umkehrung der **Potenzierung**:

Potenzierung	Radizieren: „erste“ Umkehrung	Logarithmieren: „zweite“ Umkehrung
$2^3 = ?$	$?^3 = 8$ $\Leftrightarrow ? = \sqrt[3]{8}$	$2^? = 8$ $\Leftrightarrow ? = \log_2 8$
Frage nach dem Potenzwert	Frage nach der Basis	Frage nach dem Exponenten

1.3.6.1 Der Begriff des Logarithmus

➤ Definition:

- $\log_a x = y$
- Der Logarithmus einer Zahl $x > 0$ zur Basis a ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muß, um den Numerus (x) zu erhalten.
- $\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$
- a : heißt **Basis**
 x : heißt **Numerus**
 y : heißt **Logarithmus**

1.3.6.1 Der Begriff des Logarithmus

➤ Es gilt insbesondere:

$$\log_a a = 1, \quad \text{denn } a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{denn } a^0 = 1 \text{ mit } a \neq 0$$

$$\log_a a^x = x, \quad \text{denn } a^x = a^x$$

1.3.6.2 Dekadischer und natürlicher Logarithmus

➤ Dekadischer Logarithmus: 10er Logarithmus

- Basis ist immer 10
- $\log_{10}x = \lg x$
- z. B. $\lg 100 = 2$
 $\lg 1000 = 3$

➤ Natürlicher Logarithmus: „logarithmus naturalis“

- Basis ist immer die Eulersche Zahl $e = 2,71828$
- $\log_e x = \ln x$
- z. B. $\log_e 1 = \ln 1 \Leftrightarrow e^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

➤ Verhältnis Potenzieren/Logarithmieren:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$\Rightarrow$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

$\Rightarrow$

$$y = \log_a (a^y)$$

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

➤ Gesetze für Logarithmen:

$$1. \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2. \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$3. \quad \log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$$

➤ Spezialfälle: $\log_a \frac{1}{x} = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

1.3.6.3 Rechenregeln und Logarithmusgesetze

➤ „Logarithmus naturalis“:

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{oder} \quad x = e^{\ln x}$$

$$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$$

➤ Rechenregel:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

1.4 Mengen und Abbildungen

1.4.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.4.1.1 Schreibweisen und Darstellungen für Mengen

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

1.4.1.4 Rechengesetze der Mengenalgebra

1.4.1.5 Kartesisches Produkt und Kreuzmenge

1.4.1.6 Element und Teilmenge

1.4.2 Abbildungen

1.4.1.1 Schreibweisen und Darstellungen für Mengen

➤ Definition der Menge (naiver Mengenbegriff):

Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte. Jedes zur Menge gehörige Objekt heißt Element der Menge.

➤ Schreibweisen:

$a \in A$ „a ist Element von A“

$b \notin A$ „b ist nicht Element von A“

➤ Beispiele für Mengen:

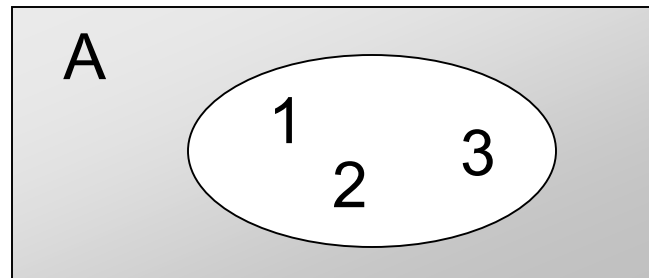
$\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathbb{R}_{> 0}$, $\mathbb{R}_{< 0}$

1.4.1.1 Schreibweisen und Darstellungen von Mengen

➤ Darstellungen:

■ $\mathbb{R}_{\geq 0}$

■ Venn-Diagramm:



■ aufzählend:

z. B. $A := \{ 1, 2, 3 \}$

■ beschreibend:

z. B. $A := \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 4 \}$

■ Zeichen für die **leere Menge**:

$\emptyset, \{ \}$

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

➤ Teilmenge (Obermenge, Untermenge)

- A ist Teilmenge von B, wenn jedes Element aus A auch in der Menge B enthalten ist.
- $A \subset B$: A ist Teilmenge (Untermenge) von B
- $B \supset A$: B ist Obermenge von A

➤ Gleichheit von Mengen

- Zwei Mengen sind gleich, wenn jedes Element aus A auch Element ist aus B und umgekehrt.
- $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

➤ Wichtige Anmerkung:

- Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst:
 $A \subset A$
- Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge.

1.4.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

➤ Potenzmenge:

- Die Potenzmenge einer Menge M wird bezeichnet als $\rho(M)$ und ist die Menge aller Teilmengen von M .

$$\rho(M) := \{ A \mid A \subset M \}$$

- Beispiel:

$$M := \{ 1, 2, 3 \}$$

$$\rho(M) := \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

- Die Potenzmenge enthält 2^n Elemente, wobei n die Anzahl der Elemente von M ist.

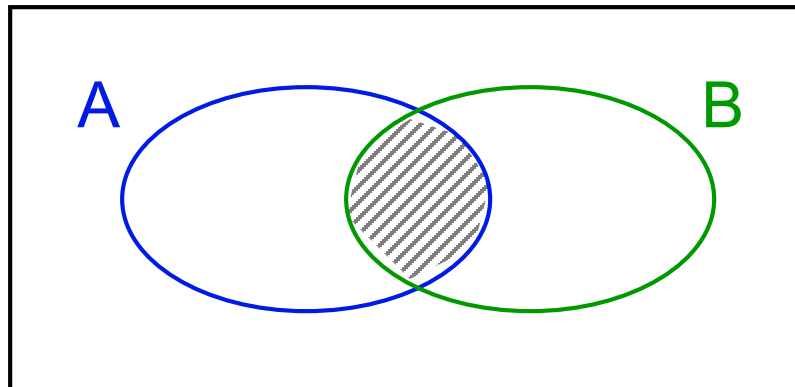
1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Durchschnitt:

- Die Durchschnitts- oder Schnittmenge von zwei Mengen A und B im Zeichen $A \cap B$ ist die Menge der Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

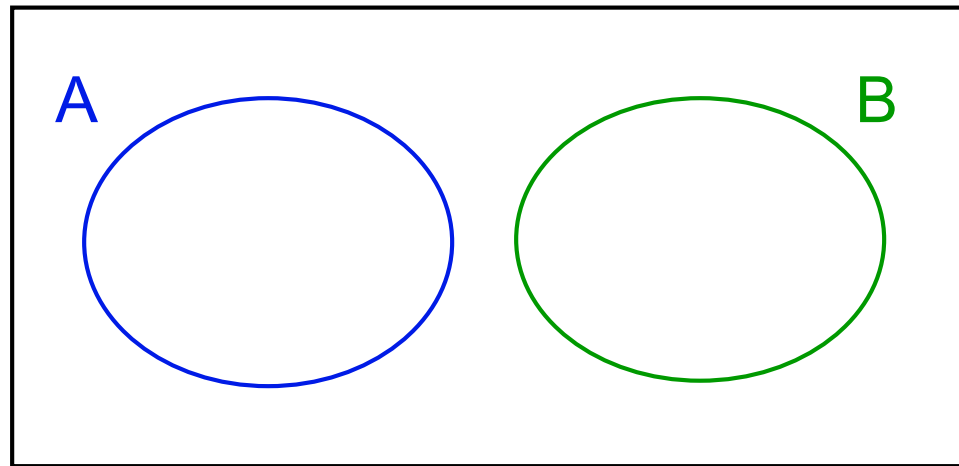
- $A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

- Venn-Diagramm:



1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Wichtig:



A und B heißen elementfremd oder **disjunkt**.

$$A \cap B = \emptyset$$

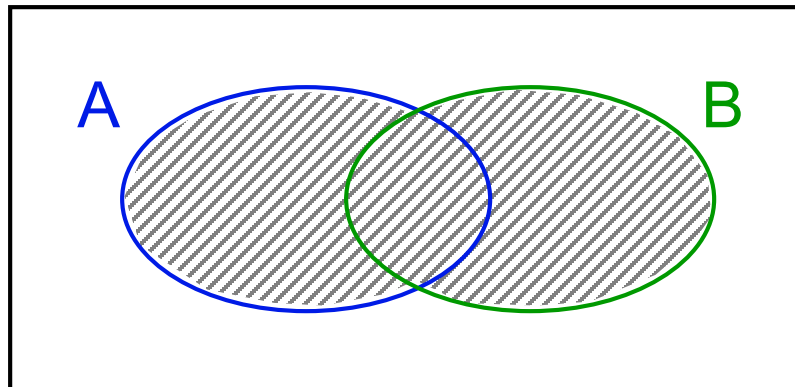
1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Vereinigung:

- Die Vereinigungsmenge von zwei Mengen A und B im Zeichen $A \cup B$ ist die Menge der Elemente, die mindestens in einer Menge, A oder B, liegen.

- $A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

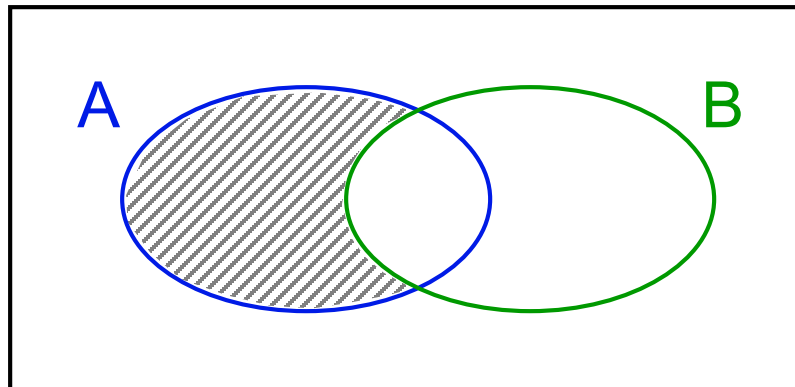
- Venn-Diagramm:



1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Differenz:

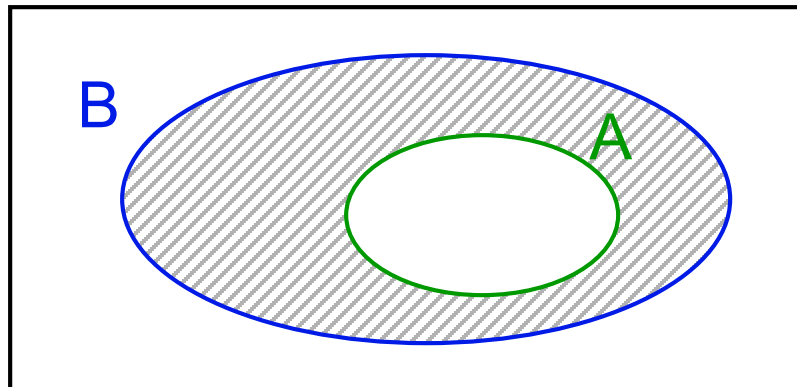
- Die Differenz $A \setminus B$ enthält genau die Elemente von A, die nicht Elemente von B sind.
- $A \setminus B := \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- Venn-Diagramm:



1.4.1.3 Operationen zwischen Mengen

➤ Komplement:

- Ist $A \subset B$, so besteht das Komplement von A bezüglich B aus allen Elementen von B, die nicht in A enthalten sind.
- $\overline{A}_B := B \setminus A$
- Venn-Diagramm:



1.4.1.4 Rechengesetze der Mengenalgebra

➤ **Kommutativgesetz:**

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$

➤ **Assoziativgesetz:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

➤ **Distributivgesetz:**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{und} \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

1.4.1.4 Rechengesetze der Mengenalgebra

$$1. \quad A \subset B \quad \Rightarrow \quad \bar{B}_M \subset \bar{A}_M \quad \text{mit } M \supset A \cup B$$

$$2. \quad (\overline{\bar{A}_M})_M = A$$

$$3. \quad (\overline{A \cup B})_M = \bar{A}_M \cap \bar{B}_M \quad \text{und} \quad (\overline{A \cap B})_M = \bar{A}_M \cup \bar{B}_M$$

1.4.1.5 Kartesisches Produkt und Kreuzmenge

➤ n-Tupel:

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$

heißt n-Tupel und

a_i mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ die i-te Komponente des n-Tupels.

➤ Kartesisches Produkt/Kreuzmenge:

Als kartesisches Produkt $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ bezeichnet man die Gesamtheit aller n-Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

1.4.1.5 Kartesisches Produkt und Kreuzmenge

➤ Spezielle kartesische Produkte:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &:= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \\ &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge \dots \wedge x_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

➤ Beispiel:

$$A := \{1, 2, 3\} \text{ und } B := \{4, 5\}$$

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

➤ Wichtig: $A \times B \neq B \times A$

1.4.2 Abbildungen

1.4.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.4.2 Abbildungen

1.4.2.1 Definition und Graph einer Abbildung

1.4.2.2 Bildmenge und Urbildmenge

1.4.2.3 Komposition von Abbildungen

1.4.2.4 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

1.4.2.5 Inverse Abbildung

1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

(Ganzrationale Funktionen, Wurzelfunktionen,
gebrochenrationale Funktionen,
Exponential- und Logarithmusfunktionen)

1.4.2.1 Definition und Graph einer Abbildung

➤ Definition der Abbildung:

- Eine Vorschrift f , die jedem Element x einer Menge A **genau** ein Element y einer Menge B zuordnet, heißt Abbildung von A nach B
- $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y =: f(x)$
- A heißt **Definitionsbereich** von f (D_f)
 B heißt **Wertebereich** von f (W_f)

➤ Graph einer Abbildung:

- Als Graph einer Abbildung f bezeichnet man die Menge
 $\text{graph } f := \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$
- Es gilt:
 $\text{graph } f \subset A \times B$

1.4.2.2 Bildmenge und Urbildmenge

➤ Bildmenge und Urbildmenge:

■ Es gelte: $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y =: f(x)$

■ Weiterhin gelte: $M \subset A$ und $N \subset B$

■ Dann heißen:

$$f[M] := \{ f(x) \mid x \in M \}$$

die **Bildmenge**
von M unter f

$$f^{-1}[N] := \{ x \mid x \in A \wedge f(x) \in N \}$$

die **Urbildmenge**
von N unter f

1.4.2.3 Komposition von Abbildungen

➤ Komposition von Abbildungen

- Es sind: $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y =: f(x)$
 $g : C \rightarrow D$ mit $y \rightarrow z =: g(y)$

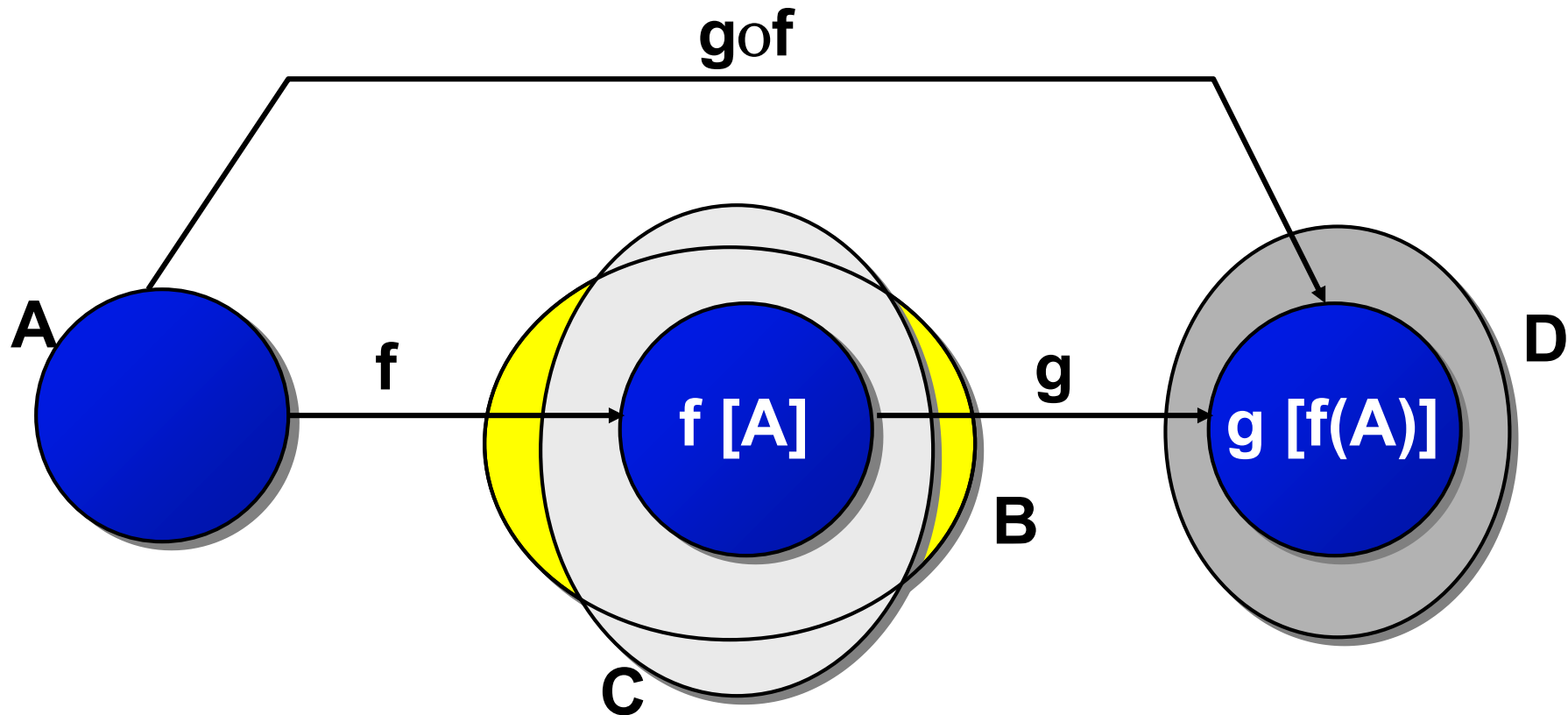
und: $f[A] \subset C$

- So heißt:

$$g \circ f : A \rightarrow D \quad \text{mit} \quad x \rightarrow z = (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Komposition von f und g .

1.4.2.3 Komposition von Abbildungen



1.4.2.4 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y = f(x)$ heißt

- **injektiv:**

$$:\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$:\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A) (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

$\Rightarrow$ Ein $y \in B$ darf **höchstens** einmal getroffen werden!

- **surjektiv:**

$$:\Leftrightarrow f[A] = B \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\exists x \in A) (f(x) = y)$$

$\Rightarrow$ Jedes $y \in B$ wird **mindestens** einmal getroffen!

- **bijektiv:**

$$:\Leftrightarrow f \text{ ist injektiv und surjektiv}$$

$\Rightarrow$ Jedes $y \in B$ wird **genau** einmal getroffen!

1.4.2.5 Inverse Abbildung

➤ Inverse Abbildung oder Umkehrabbildung:

Die zu einer bijektiven Abbildung

$$f : A \rightarrow B \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x)$$

inverse Abbildung (oder Umkehrabbildung)

ist die eindeutig bestimmte bijektive Abbildung

$$f^{-1} : B \rightarrow A \quad \text{mit} \quad y \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

mit der Eigenschaft:

$$(\forall x \in A, y \in B) \quad (x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y)$$

➤ Die zu einer bijektiven Abbildung gehörige inverse Abbildung ist also ebenfalls bijektiv.

1.4.2.6 Graphen ausgewählter Funktionen

Funktionstyp	Beispiel
Lineare Funktionen	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = 0,5 \cdot x + 4$
Quadratische Funktionen	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = x^2$
Kubische Funktionen	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = x^3$
Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x+2)$
Wurzelfunktionen	$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \sqrt{x}$ $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \sqrt[3]{x}$
Gebrochenrationale Funktionen	$f : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \frac{1}{x}$
Exponentialfunktion	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = e^x$
Logarithmusfunktion	$f : \mathbb{R}_{> 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \ln x$

1.5 Lösung von Gleichungen in einer Variablen

➤ Arten von Gleichungen:

■ identische Gleichungen:

z.B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

■ Funktionsgleichung:

z.B. $f : D_f \rightarrow W_f$ mit $x \mapsto y = f(x) = x^2$

■ Bestimmungsgleichungen:

⇒ Lösung durch Äquivalenzumformungen

z.B. $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-3}{x-5}$

1.5 Lösung von Gleichungen in einer Variablen

1.5.1	Lineare Gleichungen	$a \cdot x = b$, z.B. $8 \cdot x = 32$
1.5.2	Quadratische Gleichungen	Satz von Vieta, pq-Formel
1.5.3	Gleichungen mit Quotienten	z.B. $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-3}{x-5}$
1.5.4	Wurzelgleichungen	z.B. $2 \cdot \sqrt{5-x} = 3 \cdot \sqrt{8+x}$
1.5.5	Potenzgleichungen	$x^a = b \Leftrightarrow x = \sqrt[a]{b}$
1.5.6	Exponential- und Logarithmengleichungen	$a^x = b$ oder $\log_a x = c$
1.5.7	Biquadratische Gleichungen	$ax^4 + bx^2 + c = 0$
1.5.8 a)	Homogene Gleichungen höherer Ordnung	z.B. $x^5 - 7x^4 + 6x^3 = 0$
1.5.8 b)	Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung	z.B. $4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 - 52 \cdot x = -60$

1.5.2 Quadratische Gleichungen

➤ Allgemeine Form: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a \neq 0$

➤ Normalform:

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_p \cdot x + \underbrace{\frac{c}{a}}_q = 0$$
$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

➤ Satz von Vieta:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.5.7 Biquadratische Gleichungen

➤ Allgemein: $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$
 ↓
 maximal 4 Lösungen

➤ Lösungsverfahren (per Substitution):

1. Schritt: Setze statt x^2 den Term z , d.h.

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

2. Schritt: Löse die quadratische Gleichung
Für z erhält man maximal 2 Lösungen

3. Schritt: Bestimme x durch Lösen der Gleichung $x^2 = z$

1.5.8 Gleichungen höherer Ordnung

➤ Homogene Gleichungen höherer Ordnung:

■ Kennzeichen:

⇒ Absolutglied ist gleich null.

■ Vorgehensweise:

⇒ zunächst x mit der niedrigsten Potenz ausklammern

⇒ anschließend Zerlegung in Linearfaktoren

■ Beispiel:

$$\begin{aligned} x^5 - 7 \cdot x^4 + 6 \cdot x^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 \cdot \underbrace{(x^2 - 7 \cdot x + 6)}_{\text{pq-Formel}} &= 0 \end{aligned}$$

1.5.8 Gleichungen höherer Ordnung

➤ Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung:

■ Kennzeichen:

⇒ Absolutglied ist ungleich null.

■ Vorgehensweise:

⇒ Zerlegung in Linearfaktoren
bspw. mit Hilfe der Polynomdivision

⇒ Cardanische Formeln (hier nicht)

■ Beispiel:

$$4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 - 52 \cdot x + 60 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) \cdot (x + 3) = 0$$

1.6 Ungleichungen

1.6.1 Rechenregeln

1.6.2 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

1.6.1 Rechenregeln

➤ Multiplikation mit Zahlen

für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a < b \quad \wedge \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

$$a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c$$

➤ Kehrwertbildung

für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

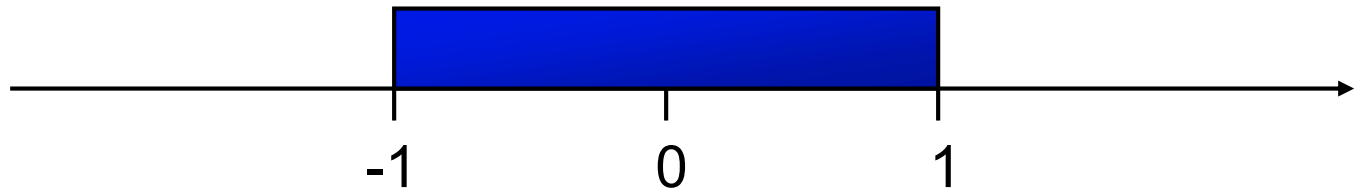
$$a < b \quad \wedge \quad a \cdot b > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < b \quad \wedge \quad a \cdot b < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

1.6.2 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

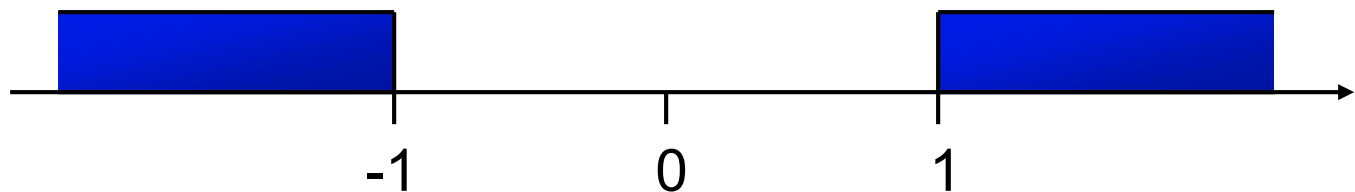
Beispiel 1:

$$|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \quad \text{und} \quad x < 1$$



Beispiel 2:

$$|x| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \quad \text{oder} \quad x > 1$$



1.7 Das Summen- und das Produktzeichen

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

1.7.2 Das Produktzeichen und seine Rechenregeln

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

➤ Das Summenzeichen:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

i: heißt Summationsindex

a: heißt Summationsvariable

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

➤ Rechenregeln für das Summenzeichen:

■ Multiplikation mit einer Konstanten c:

$$\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

■ Additions- und Subtraktionsregel:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

■ Addition einer Konstanten c:

$$\sum_{i=1}^n (c + a_i) = \sum_{i=1}^n c + \sum_{i=1}^n a_i = n \cdot c + \sum_{i=1}^n a_i$$

1.7.1 Das Summenzeichen und seine Rechenregeln

➤ Doppelsummen:

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
i=2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
i=3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij} &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ &\quad + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ &\quad + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}\end{aligned}$$

1.7.2 Das Produktzeichen und seine Rechenregeln

➤ Das Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

➤ Rechenregeln für das Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^n c \cdot a_i = c^n \cdot \prod_{i=1}^n a_i \quad \text{für } c = \text{const.}$$

$$\prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$$

$$\prod_{i=1}^n a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2$$

Gliederung

- 2 Lineare Gleichungen und Ungleichungen
 - 2.1 Einführendes Beispiel
 - 2.2 Matrizenrechnung
 - 2.3 Lineare Gleichungssysteme
 - 2.4 Determinanten
 - 2.5 Einführung in die lineare Optimierung

2.2 Matrizenrechnung

2.2.1 Grundlagen der Matrizenrechnung

2.2.2 Rechenoperationen mit Matrizen

2.2.1.1 Der Begriff der Matrix

➤ Matrix:

⇒ Eine rechteckige Anordnung reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten heißt **(mxn)-Matrix** (*sprich: m Kreuz n Matrix*).
Häufig verwendet man das Symbol A oder andere **Großbuchstaben**.

z.B.:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oder allgemein :} \quad A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

⇒ a_{ij} heißt das in der **i-ten Zeile** und **j-ten Spalte** stehende **Element** dieser Matrix.

2.2.1.1 Der Begriff der Matrix

- Allgemein formuliert man:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Sind alle Elemente a_{ij} der Matrix gleich null ($a_{ij} = 0$), dann handelt es sich um eine **Nullmatrix**. Man schreibt: $0_{m \times n}$

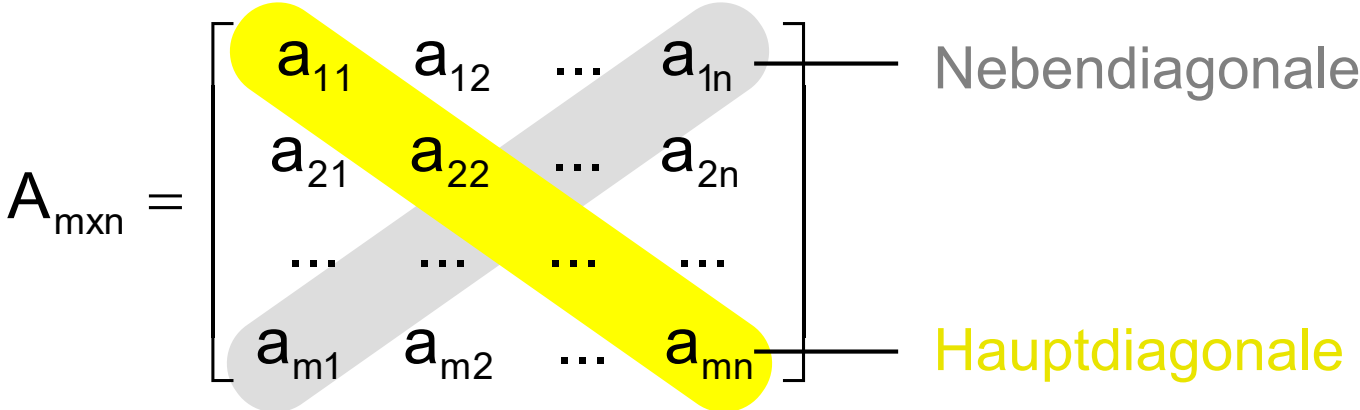
2.2.1.2 Hauptdiagonale und Nebendiagonale

➤ Diagonalen einer Matrix:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nebendiagonale

Hauptdiagonale



2.2.1.3 Sonderfälle von Matrizen

- Eine (mx1)-Matrix heißt **Spaltenvektor**.

$$\text{z.B.} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Eine (1xn)-Matrix nennt man **Zeilenvektor**

$$\text{z.B.} \quad \mathbf{b} = (3 \quad 2 \quad 6)$$

2.2.1.4 Transponierte einer Matrix

➤ Transposition:

- Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Matrix, so erhält man die **transponierte Matrix**.
- Aus einer Matrix $A_{m \times n}$ mit den Elementen a_{ij} erhält man durch Transponieren eine neue Matrix $B_{n \times m}$ mit $b_{ji} = a_{ij}$.
- Die zu $A_{m \times n}$ transponierte Matrix heißt: $A_{m \times n}^T = B_{n \times m}$
- Es gilt: $(A^T)^T = A$
- z. B.:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{2 \times 3}^T = B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.2.1.5 Spezielle Matrizen

➤ Quadratische Matrix:

- Gilt $m = n$ (Zeilenzahl = Spaltenzahl), dann handelt es sich um eine quadratische Matrix, z.B. $A_{3 \times 3}$ oder $B_{2 \times 2}$ etc.
- Man spricht auch von einer n -reihigen Matrix.

➤ Symmetrische Matrix:

- Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, wenn für alle i, j gilt: $a_{ij} = a_{ji}$

➤ Diagonalmatrix:

- Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn für alle i, j mit $i \neq j$ gilt: $a_{ij} = 0$

2.2.1.5 Spezielle Matrizen

➤ Einheitsmatrix:

- Eine Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix, wobei für alle $i = j$ gilt: $a_{ij} = 1$
- Die Einheitsmatrix wird mit dem Buchstaben E bezeichnet: $E_{n \times n}$

$$E_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Man spricht auch von einer n-reihigen Einheitsmatrix, ihre Spaltenvektoren heißen **kanonische Einheitsvektoren** des $\mathbb{R}^n$.

2.2.1.5 Spezielle Matrizen

➤ Dreiecksmatrix:

- Eine quadratische Matrix, deren sämtliche Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen gleich Null sind, heißt obere (untere) Dreiecksmatrix.

Obere Dreiecksmatrix:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i > j$$

z. B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i < j$$

z. B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.2.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

➤ Weitere **Rechenregeln** für die Matrizenaddition

1. Kommutativgesetz:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = B_{m \times n} + A_{m \times n}$$

2. Assoziativgesetz:

$$(A_{m \times n} + B_{m \times n}) + C_{m \times n} = A_{m \times n} + (B_{m \times n} + C_{m \times n})$$

3. Transposition:

$$(A_{m \times n} + B_{m \times n})^T = A_{m \times n}^T + B_{m \times n}^T$$

➤ Analoges gilt für die Matrizen-subtraktion

2.2.2.2 Multiplikation von Matrizen mit einem Skalarfaktor

➤ **Rechenregeln** für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor:

$$1. \quad 0 \cdot A_{m \times n} = 0_{m \times n}$$

$$2. \quad (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot A_{m \times n} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot A_{m \times n})$$

$$3. \quad \lambda \cdot (A_{m \times n} + B_{m \times n}) = \lambda \cdot A_{m \times n} + \lambda \cdot B_{m \times n}$$

$$4. \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A_{m \times n} = \lambda_1 \cdot A_{m \times n} + \lambda_2 \cdot A_{m \times n}$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ **Formale Vorgehensweise** zur Matrizenmultiplikation:

Jede Zeile von A wird mit jeder Spalte von B multipliziert:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}}^{c_{11}} & \overbrace{a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}}^{c_{12}} \\ \underbrace{a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}}_{c_{21}} & \underbrace{a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}}_{c_{22}} \end{bmatrix}$$

Voraussetzung ist somit, daß eine Zeile der Matrix A genauso viele Elemente besitzt wie eine Spalte der Matrix B.

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ *Beachte:*

- Das **Kommutativgesetz** gilt hier **NICHT!**
Das bedeutet:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2.2.2.3 Multiplikation von Matrizen und deren inhaltliche Interpretation

➤ Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation:

1. $E_{m \times m} \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n} = A_{m \times n} \cdot E_{n \times n}$
2. $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times q} = A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times q})$
3. $A_{m \times n} \cdot (B_{n \times r} + C_{n \times r}) = A_{m \times n} \cdot B_{n \times r} + A_{m \times n} \cdot C_{n \times r}$
 $(A_{m \times n} + B_{m \times n}) \cdot C_{n \times r} = A_{m \times n} \cdot C_{n \times r} + B_{m \times n} \cdot C_{n \times r}$
4. $\lambda \cdot (A_{m \times n} \cdot B_{n \times r}) = (\lambda \cdot A_{m \times n}) \cdot B_{n \times r} = A_{m \times n} \cdot (\lambda \cdot B_{n \times r})$
5. $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times r})^T = B_{n \times r}^T \cdot A_{m \times n}^T$

2.2.2.4 Die Inverse einer Matrix und ihre Eigenschaften

- Inverse Elemente bei der Multiplikation von Zahlen:

$$3 \cdot 3^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

- Für die zur Matrix A inverse Matrix A^{-1} gilt (ähnlich wie oben):

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = E$$

- Die Division von Matrizen ist nicht definiert:

$$\frac{A}{B} \quad \text{ist nicht definiert !}$$

2.2.2.4 Die Inverse einer Matrix und ihre Eigenschaften

➤ *Beachte:*

- Die inverse Matrix ist nur für quadratische Matrizen definiert!
- Nicht jede quadratische Matrix hat eine Inverse.

Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat keine Inverse.

- Sind zwei Matrizen A und B zueinander invers, so läßt sich dieser Sachverhalt durch Multiplikation der beiden Matrizen überprüfen:

$$A \cdot B = E$$

2.2.2.4 Die Inverse einer Matrix und ihre Eigenschaften

➤ Rechenregeln:

$$1. \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2. \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$3. \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$4. \quad (c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } c \neq 0$$

2.3 Lineare Gleichungssysteme

- 2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems
- 2.3.2 Grundlagen sowie Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
- 2.3.3 Aufstellung und Lösung linearer Gleichungssysteme dargestellt an einem einfachen Beispiel mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen
- 2.3.4 Gauß-Algorithmus und vollständiges Eliminationsverfahren
- 2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix
- 2.3.6 Lösung mittels Matrixinversion
- 2.3.7 Anwendungsbeispiele

2.3.1 Der Begriff des linearen Gleichungssystems

- Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Lösungsvariablen $x_1, \dots, x_n$:

$$(1) \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$(2) \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

...

$$(m) \quad a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

mit $(\forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}) (a_{ij} \in \mathbb{R} \wedge b_i \in \mathbb{R})$

- Kennzeichen:

⇒ Alle Lösungsvariablen (= Unbekannten) treten nur in der ersten Potenz auf.

⇒ Alle Lösungsvariablen (= Unbekannten) sind nur additiv verknüpft.

- Die (konstanten) Zahlen $a_1, \dots, a_{mn}$ heißen Koeffizienten, die Zahlen $b_1, \dots, b_m$ heißen rechte Seiten des Gleichungssystems.

2.3.2.1 Homogene und inhomogene Gleichungssysteme

➤ Lineares Gleichungssystem:

$$(1) \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$(2) \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

...

$$(m) \quad a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

⇒ Das Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn für alle b_i gilt:
 $b_i = 0$ mit $i = 1, 2, \dots, m$.

⇒ Ist ein b_i ungleich null, so spricht man von einem **inhomogenen** Gleichungssystem.

2.3.2.3 Lineare Abhängigkeit von Gleichungen

➤ Linear unabhängige Vektoren:

- Die m Zeilenvektoren a_i (mit $i = 1, \dots, m$) heißen linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur als triviale Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, m$$

- Die n Spaltenvektoren a_j (mit $j = 1, \dots, n$) heißen linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur als triviale Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \vec{a}_j = \vec{0} \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, n$$

2.3.4.1 Koeffizientenmatrix und erweiterte Matrix in der Matrizen Schreibweise

➤ **Matrizendarstellung:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}$$

2.3.4.1 Koeffizientenmatrix und erweiterte Matrix in der Matrizenschreibweise

➤ **Matrizendarstellung:**

$$\left[A \mid \mathbf{b} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Koeffizientenmatrix

$\underbrace{\hspace{15em}}$
erweiterte Matrix

2.3.4.2 Elementare Zeilentransformationen an der erweiterten Matrix

- Elementare Zeilenumformungen:
 - Zeilentausch
 - Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl
 - Addition des λ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Die Menge der Lösungen bleibt stets erhalten!

2.3.4.3 Gauß-Algorithmus

➤ Gauß-Algorithmus

- Umformen der Matrix zu einer oberen Dreiecksmatrix
- Anschließend Rückübersetzung

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & & \\ 0 & a_{22} & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{array} \right]$$

2.3.4.4 Vollständiges Eliminationsverfahren

➤ Vollständiges Eliminationsverfahren (Gauß-Jordan-Verfahren)

- Umformen der Matrix zu einer Einheitsmatrix
- Die Lösung kann jetzt direkt abgelesen werden. Eine Rückübersetzung ist nicht erforderlich!

$$\left[A \mid \mathbf{b} \right] = \left[\begin{array}{c|c} & \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2.3.5 Lösbarkeit und Rang einer Matrix

➤ Das System ist genau dann

- unlösbar, wenn $\text{rang } A < \text{rang } [A \mid \mathbf{b}]$
- lösbar, wenn $\text{rang } A = \text{rang } [A \mid \mathbf{b}]$
 - ◆ eindeutig lösbar, wenn $\text{rang } A = \text{rang } [A \mid \mathbf{b}] = n$
 - ◆ universell lösbar, wenn $\text{rang } A = \text{rang } [A \mid \mathbf{b}] < n$
Dann sind $d = n - \text{rang } A$ Parameter frei wählbar.

mit

n = Anzahl der Variablen

Rang = Anzahl der im System enthaltenen unabhängigen Zeilenvektoren („Anzahl der Kanten“)

(Anm.: Berechnung des Rangs mittels Gauß-Verfahren möglich)

2.3.6.1 Matrixinversion mit Hilfe des vollständigen Eliminationsverfahrens

- Zusammenhang zwischen regulärer Matrix A und der Inversen A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

- Berechnung des Lösungsvektors $\mathbf{x}$ eines linearen Gleichungssystems über Zeilentransformationen an der erweiterten Matrix (vollständiges Eliminationsverfahren):

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \text{erweiterte Matrix} \quad \left[A \mid \mathbf{b} \right]$$

- Berechnung der Inversen gleichermaßen mit Hilfe des vollständigen Eliminationsverfahrens:

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \Rightarrow \quad \text{"erweiterte Matrix"} \quad \left[A \mid E \right]$$

2.3.6.2 Nutzung der Matrixinversion für Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten

- Allgemeine Form des linearen Gleichungssystems:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Lösung mit Hilfe der Matrixinversion:

⇒ Multipliziere beide Seiten (von links!) mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

⇒ *Beachte:*

Da das Kommutativgesetz bei der Matrizenmultiplikation nicht gilt, muss auf beiden Seiten der Gleichung „von links“ multipliziert werden!

2.3.7 Anwendungsbeispiele

➤ Ökonomische Zusammenhänge:

$$G = E - K$$

$$E = p \cdot x$$

$$K = K_{\text{var}} + K_{\text{fix}} = k_{\text{var}} \cdot x + K_{\text{fix}}$$

mit	G	:=	Gewinn
	E	:=	Erlöse
	K	:=	Kosten
	p	:=	Preis
	x	:=	Menge
	K_{var}	:=	variable Kosten (abhängig von der Menge)
	K_{fix}	:=	fixe Kosten (unabhängig von der Menge)
	k_{var}	:=	variable Stückkosten

2.4 Determinanten

2.4.1 Der Begriff der Determinante

2.4.2 Die Berechnung von Determinanten

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

2.4.4 Lösung eines linearen Gleichungssystems
mit Hilfe von Determinanten: Die Cramersche Regel

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

2.4.1 Der Begriff der Determinante

➤ Begriff der Determinante:

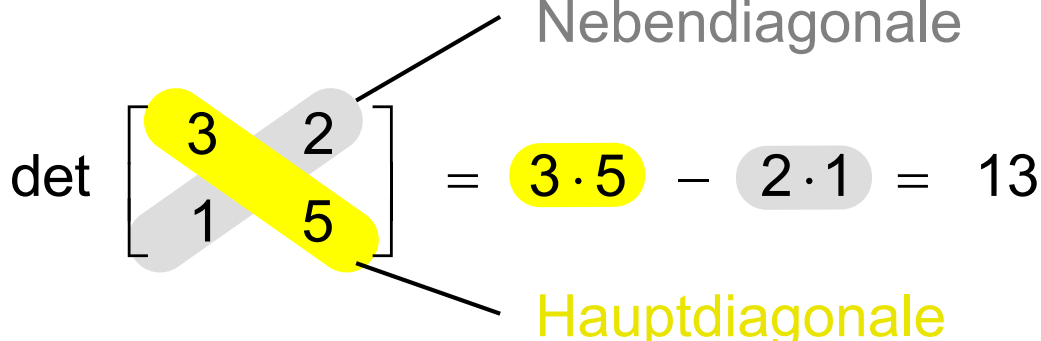
⇒ Eine Determinante bildet eine quadratische Matrix auf ein Skalar ab.

➤ Schreibweise:

⇒ $\det [A]$

➤ Beispiel:

⇒


$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 13$$

Nebendiagonale

Hauptdiagonale

2.4.1 Der Begriff der Determinante

➤ Interpretation:

- Der Absolutwert der Determinante einer 2×2 -Matrix gibt den **Flächeninhalt des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms** wieder.
- Der Absolutwert der Determinante einer 3×3 -Matrix gibt das **Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Spats** (ein in den Raum erweitertes Parallelogramm) wieder.

2.4.2.1 Die Regel von Sarrus

➤ Anwendungsbereich der Sarrus'schen Regel:

⇒ Die Sarrus'sche Regel kann nur zur Berechnung von Determinanten von 2x2- und 3x3-Matrizen angewendet werden!

➤ Vorgehensweise der Sarrus'schen Regel:

- zunächst Matrix „erweitern“
- anschließend Produkte der Haupt- und Nebendiagonalen bilden
- Produkte der Hauptdiagonalen addieren, Produkte der Nebendiagonalen subtrahieren

➤ Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4.2.1 Die Regel von Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{"Erweitern"}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

Hauptdiagonalen

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

Nebendiagonalen

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

➤ Anwendungsbereich und Grundidee des Entwicklungssatzes nach Laplace:

- Der Satz kann zur Berechnung der Determinanten von Matrizen jeglicher Größe herangezogen werden.
- Determinanten werden mit Hilfe dieses Satzes um eine Dimension reduziert.
- Determinanten können nach verschiedenen Zeilen oder Spalten entwickelt werden.

➤ Darstellung der Vorgehensweise an einem Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

⇒ Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

⇒ Die **Elemente der ersten Zeile** werden **mit den Unterdeterminanten multipliziert**, die sich ergeben, wenn die Zeile und die Spalte des jeweiligen Elements aus der Matrix gestrichen wird. Die Verknüpfung der Terme erfolgt nach einem bestimmten Schema!

$$\begin{array}{ccc}
 + & & - & & + \\
 \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & \boxed{2} & 4 \\ 6 & 1 & \boxed{2} \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{4} \\ \boxed{6} & 1 & \boxed{2} \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & 4 \\ \boxed{6} & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

⇒ Die Determinante der Matrix A berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 6) + 3 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 6) \\ &= 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-10) \\ &= 40 - 30 = 10 \end{aligned}$$

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

- Die Verknüpfung der Terme erfolgt nach dem folgenden Vorzeichenschema („Schachbrettmuster“):

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

➤ *Anmerkung:*

- ⇒ Es kann nach jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt werden. Am einfachsten ist es, wenn man die Zeile oder Spalte mit den meisten „Nullen“ wählt!

2.4.2.2 Der Entwicklungssatz nach Laplace

➤ Beispiel Dreiecksmatrix:

⇒ Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen!

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot 4 - 0 \cdot 1) - 0 + 0 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

1. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 18 \end{bmatrix} = 18 - 14 = 4$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (4 - 0) \cdot (3 - 2) = 4$$

2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 8 - 0 = 8 \quad \text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}_{128}$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

3. $\det(A) = \det(A^T)$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad \text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2$$

4. Werden zwei Zeilen oder Spalten vertauscht, so wechselt das Vorzeichen der Determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad \text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 4 = +2$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

5. Wird zu einer Zeile (oder Spalte) einer Matrix das λ -fache einer anderen Zeile (bzw. Spalte) addiert, verändert sich der Wert der Determinante nicht:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 5 - 2 = 3 \quad \text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 7 - 4 = 3$$

6. Wird jedes Element einer Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert, so ändert sich der Wert der Determinante um das λ -fache.

$$4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 4 \cdot (5 - 2) = 12$$

$$\text{und} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = 20 - 8 = 12$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

$$7. \quad \det(\lambda \cdot A_{n \times n}) = \lambda^n \cdot \det(A_{n \times n})$$

$$\begin{aligned} \det\left(4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) &= \det\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} = 80 - 32 = 48 \\ &= 4^2 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 16 \cdot (5 - 2) = 48 \end{aligned}$$

2.4.3 Rechenregeln für Determinanten

$$8. \quad \det(A_{n \times n}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A_{n \times n}) = n$$

Ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten ist somit nur dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist, d.h., wenn die Zeilen linear unabhängig voneinander sind!

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot (2 - 0) - 0 + 0 = 6$$

$$\text{aber} \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

2.4.4 Die Cramersche Regel

➤ Anwendungsbereich :

⇒ Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme der Form:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

bzw.

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots] \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

➤ Cramersche Regel:

$$x_1 = \frac{\det [\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots]}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \dots]}{\det A}$$

$$x_3 = \frac{\det [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \dots]}{\det A}$$

...

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

- Zur Berechnung der Inversen kann die **adjungierte Matrix**, bezeichnet mit $\text{adj}(A)$, herangezogen werden:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

2.4.5 Die Berechnung der Inversen mittels der adjungierten Matrix

➤ Vorgehensweise zur Bestimmung der adjungierten Matrix:

- Zunächst wird die Matrix transponiert (dies kann auch zu einem späteren Zeitpunkt geschehen).
- Die adjungierte Matrix ergibt sich dann als Matrix der Unterdeterminanten der transponierten Matrix, wobei wiederum das Vorzeichenschema des Entwicklungssatzes nach Laplace berücksichtigt werden muss. Für eine 3x3-Matrix lautet die Adjunkte:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} + \det_{11} & - \det_{12} & + \det_{13} \\ - \det_{21} & + \det_{22} & - \det_{23} \\ + \det_{31} & - \det_{32} & + \det_{33} \end{bmatrix}$$

Die Unterdeterminanten erhält man wiederum durch Streichen der zu einem Element zugehörigen Zeile und Spalte.

2.5 Einführung in die lineare Optimierung

2.5.1 Problemstellung

2.5.2 Beispiel für Standard-Maximum-Problem

2.5.3 Graphische Lösung des Beispiels

2.5.2 Beispiel für ein Standard-Maximum-Problem

➤ Allgemeine mathematische Formulierung der Aufgabe:

Maximiere die lineare Zielfunktion: $Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$

unter den linearen
Nebenbedingungen: $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1$
 $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2$

und unter den
Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$

2.5.2 Beispiel für ein Standard-Maximum-Problem

➤ Allgemeine Formulierung eines Maximum-/Minimum-Problems in Matrizenschreibweise:

Maximiere bzw. minimiere:

$$Z = c^T \cdot \mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$A \cdot \mathbf{x} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \mathbf{b}$$

und unter den
Beschränktheitsbedingungen:

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad \text{für alle } i$$

mit l_i = lower bound (untere Grenze)
 u_i = upper bound (obere Grenze)

Es können Ganzzahligkeitsbedingungen für einige oder alle Variablen x_i hinzutreten. Man spricht dann von der ganzzahligen linearen Optimierung/Programmierung.

Gliederung

3 Folgen, Reihen und Grenzwerte

3.1 Einführendes Beispiel

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

3.5 Konvergenz und Divergenz von Zahlenfolgen und Reihen

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

- Unter einer **Folge reeller Zahlen** versteht man eine **Abbildung**

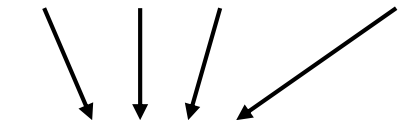
$$f: A \rightarrow B \quad \text{mit} \quad n \rightarrow f(n) \quad \text{und} \quad A \subset \mathbb{N} \quad \text{und} \quad B \subset \mathbb{R}$$

Jedem $n \in A$ ist ein $a_n := f(n) \in B$ zugeordnet.

Man schreibt hierfür $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ und nennt a_n das **n-te Glied** der Folge.

- Kurz:

$$\underbrace{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{Folge}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$$


Glieder der Folge

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

➤ Folge:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$$

➤ n-te Partialsumme:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

➤ (unendliche) Reihe:

= Folge der Partialsummen

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

3.2 Der Begriff der Folge und Reihe

➤ Alternierende Folge (Reihe):

Eine Folge (Reihe) heißt **alternierend**, wenn die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

z. B. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ mit $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ usw.

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Arithmetische Zahlenfolge:

Eine Zahlenfolge, bei der die Differenz zweier beliebiger benachbarter Glieder konstant ist, heißt arithmetische Folge.

$$:\Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_{n+1} - a_n = d)$$

➤ n-tes Glied einer arithmetischen Zahlenfolge:

$$a_n = a + (n-1) \cdot d$$

➤ n-te Partialsumme einer arithmetischen Reihe:

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

3.3 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

- Ökonomische Anwendung arithmetischer Zahlenfolgen:
Verzinsung einer Einmalzahlung K_0 ohne Zinseszins

Berechnung des Kapitals K nach n Jahren:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot \text{Zinssatz} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Geometrische Zahlenfolge:

Eine Zahlenfolge, bei der der Quotient zweier beliebiger benachbarter Glieder konstant ist, heißt geometrische Folge.

$$:\Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \right)$$

➤ n-tes Glied einer geometrischen Zahlenfolge:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

➤ n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe:

$$s_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{falls } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

3.4 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

➤ Ökonomische Anwendung geometrischer Zahlenfolgen/-reihen:

- Verzinsung einer Einmalzahlung K_0 mit Zinseszins
(Zinsen werden mit angelegt und auch verzinst)

Berechnung des Kapitals K nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \text{Zinssatz})^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$(K_0, K_1, K_2, K_3, \dots)$ ist eine geometrische Zahlenfolge.

- Sparplan/(nachschüssige) Rentenrechnung:
jährlich gleich bleibende Einzahlung a_1 am Jahresende,
Verzinsung mit Zinseszins

Berechnung des Kapitals K nach n Jahren, $q = 1 + \text{Zinssatz}$:

$$K_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3.5.1 Der Begriff der Konvergenz und Divergenz

- Gibt es zu einer Folge (a_n) eine reelle Zahl a so, dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_ε so finden lässt, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon$$

gilt, so heißt a Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) , und man nennt die **Zahlenfolge konvergent mit dem Grenzwert a** .

Man schreibt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

- **Mathematisch:**

$$(\exists a \in \mathbb{R}) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq n_\varepsilon) \quad (|a_n - a| < \varepsilon)$$

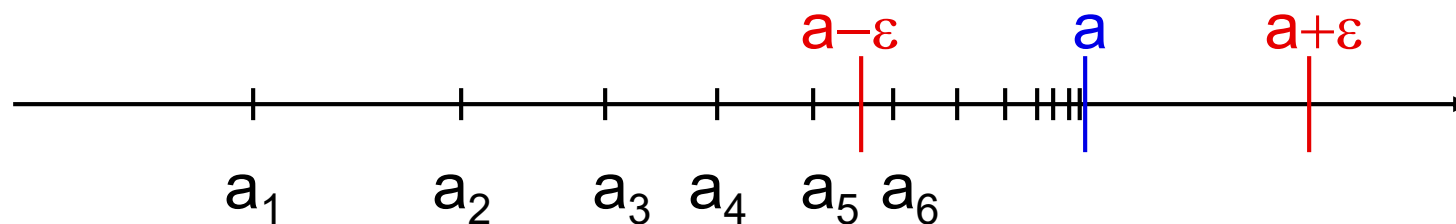
3.5.1 Der Begriff der Konvergenz und Divergenz

Konvergent: Folge $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ Konstante
(genau 1 Häufungspunkt)

Divergent: Folge $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ $\pm \infty$ oder gegen
mehr als einen Häufungspunkt

➤ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt

➤ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent



3.5.2 Grenzwertsätze

➤ Es sei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

➤ Dann gilt:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = a \cdot b$$

4. Es sei zusätzlich $b \neq 0$.
Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

- **Bestimmung des Grenzwertes** einer konvergenten Folge oder Reihe mit Hilfe von:
 - **Grenzwertsätzen** (siehe vorherige Seite)
 - oder
 - allgemein gültigen „**Brücken**“ (siehe nächste Seite)
 - oder
 - **Regel von l'Hospital** (unter bestimmten Bedingungen, siehe Kapitel 4)

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

„Brücke“

„höchste Potenz
im **Zähler**“

$$a_n = \frac{1 - n^2}{3 + 2n}$$

→ $\pm \infty$

„höchste Potenz
im **Nenner**“

$$a_n = \frac{5n}{1 - 2n^2}$$

→ 0

„höchste Potenz
sowohl im **Zähler** als
auch im **Nenner**“

$$a_n = \frac{3n - 2}{1 - 2n}$$

→ Koeffizient
(hier: $-3/2$)

3.5.3 Bestimmung der Grenzwerte von konvergenten Folgen und Reihen

- Grenzwert der geometrischen Reihe für $n \rightarrow \infty$
und $|q| < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

- Exkurs: Eulersche Zahl e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818...$$

Gliederung

4 Funktionen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2 Der Begriff der Funktion

4.3 Die Darstellung von Funktionen

4.4 Mathematische Funktionstypen

4.4.1 Mathematische Funktionstypen

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften
mathematischer Funktionstypen

4.5 Ökonomische Anwendungen

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

4.5.2 Die Break-Even-Analyse

4.2 Der Begriff der Funktion

➤ Eine Abbildung

$$f : A \rightarrow B \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x)$$

heißt **(reelle) Funktion einer (reellen) Variablen**,
falls $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$.

Jedem Element aus A wird somit eindeutig ein Element aus B zugeordnet.

➤ Schreibweisen:

■ **Explizite** Schreibweise: $y = f(x)$ z.B. $y = x^2 + 1$

■ **Implizite** Schreibweise: $f(x, y) = c$ z.B. $x^2 - y = -1$

4.3 Die Darstellung von Funktionen

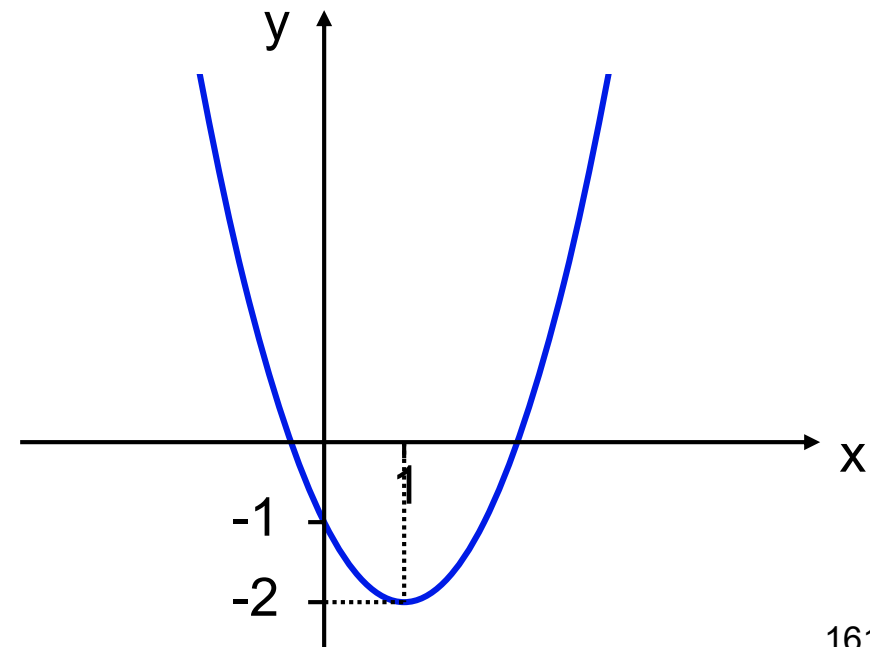
1. Darstellung in
Gleichungsform
(Funktionsgleichung)

$$y = f(x) = (x - 1)^2 - 2$$

2. Darstellung durch eine
Wertetabelle

x	-1	0	1	2	3
y = f(x)	2	-1	-2	-1	2

3. **Graphische Darstellung**
des Funktionsverlaufs
in einem Koordinaten-
system



4.4.1 Mathematische Funktionstypen: Reelle Funktionen

➤ Algebraische Funktionen:

■ ganzrationale Funktionen (Polynome)

◆ Polynom **ersten** Grades (lineare Funktionen)

$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

◆ Polynom **zweiten** Grades (quadratische Funktionen)

$$y = f(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

◆ Polynom **dritten** Grades (kubische Funktionen)

◆ Polynom **höheren** Grades

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

■ gebrochenrationale Funktionen (Quotient aus zwei Polynomen)

■ irrationale Funktionen: Wurzelfunktionen

$$\text{z.B. } y = f(x) = \sqrt{x}$$

4.4.1 Mathematische Funktionstypen: Reelle Funktionen

➤ Transzendente Funktionen

■ Exponentialfunktion

$$y = f(x) = b^x$$

■ logarithmische Funktionen

$$y = f(x) = \log_a x$$

■ (trigonometrische Funktionen)

$$\text{z.B. } y = f(x) = \sin x$$

$$y = f(x) = \cos x$$

$$y = f(x) = \tan x$$

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen

- **Definitions-lücken:** (siehe hinten)
 - Lücke (stetig fortsetzbar)
 - Sprung
 - Pol (unendlicher Sprung) mit/ohne Vorzeichenwechsel

- **Grenzwert oder Limes ($\lim f(x_0)$):**
(Definition und Berechnung des Grenzwertes siehe hinten)
 - ⇒ derjenige Wert, dem sich die Funktion f in der Umgebung der betrachteten Stelle x_0 annähert. Ein solcher Grenzwert existiert jedoch nicht in allen Fällen.

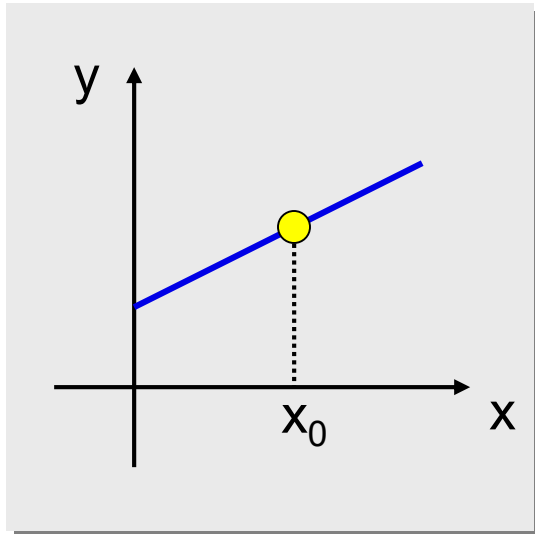
- **Stetigkeit:** f heißt stetig $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in ID}} f(x) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in ID$,
d.h. Grenzwert = Funktionswert

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen

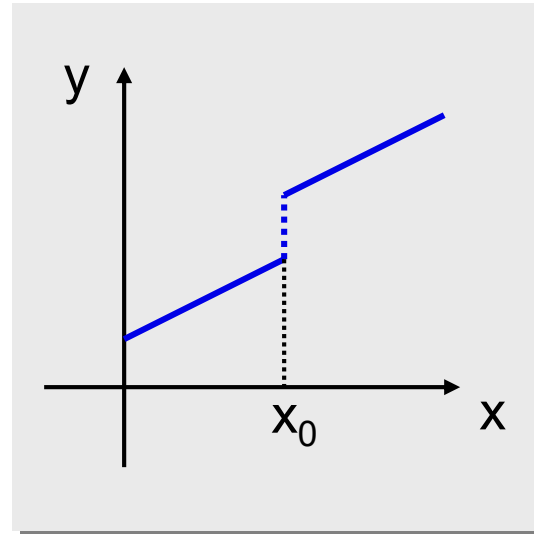
- Nullstellen: $f(x) \stackrel{!}{=} 0$
- Beschränktheit: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \neq \pm\infty$ und kein Pol existent
- Monotonie:
 - monoton wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in ID$
 - monoton fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in ID$

4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Definitionslücken

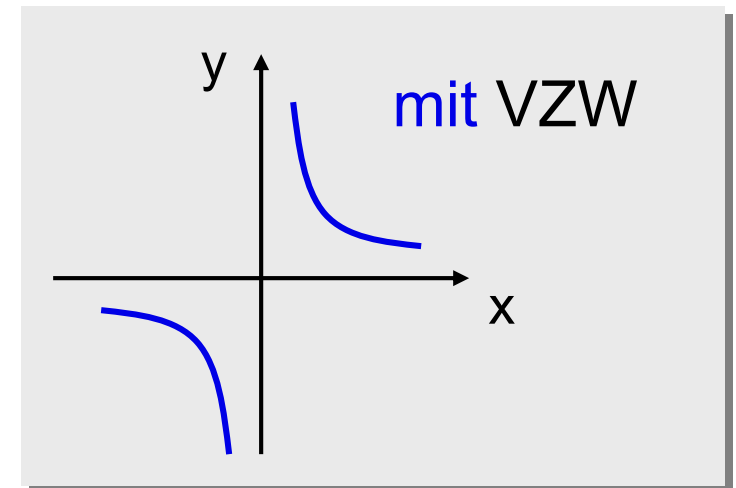
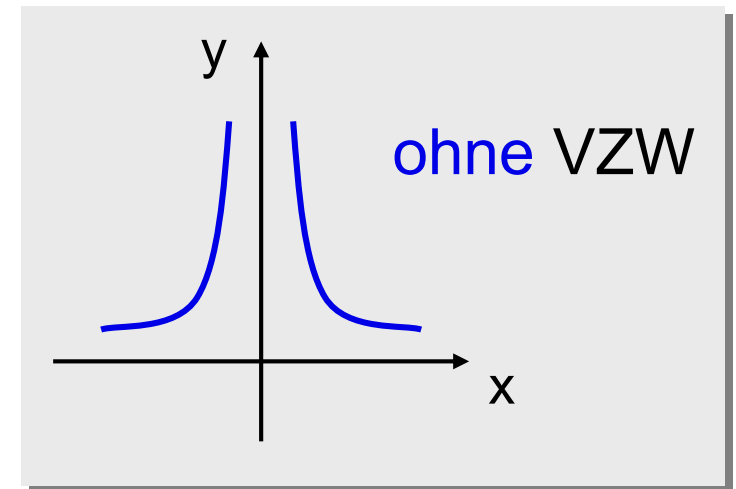
Lücke



Sprung



Pol (unendlicher Sprung)



4.4.2 Ausgewählte Eigenschaften mathematischer Funktionstypen: Bestimmung von Grenzwerten

- Bestimmung des Grenzwertes einer Funktion mit Hilfe von
 - Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen (siehe Kapitel 3) oder
 - allgemein gültigen „Brücken“ (siehe Kapitel 3) oder
 - Regel von de l'Hospital:
 - ⇒ Der Grenzwert des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen im Punkt x_0 (kann auch $\pm \infty$ sein) - beide Funktionen haben den Grenzwert Null (Typ „ $\frac{0}{0}$ “) oder beide Funktionen divergieren gegen $\pm \infty$ (Typ „ $\frac{\infty}{\infty}$ “), ist gleich dem Grenzwert des Quotienten der Ableitungen im Punkt x_0 , wenn dieser Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

➤ Produktionsfunktionen:

⇒ Ausbringungsmenge (x) als Funktion von der Faktoreinsatzmenge (r)

$$x = f(r) \Rightarrow r = f^{-1}(x)$$

➤ Kostenfunktionen:

$$\begin{aligned} \text{Kosten} &= \text{variable Beschaffungskosten} + \text{fixe Kosten} \\ &= \text{Faktorpreis} \cdot \text{Faktormenge} + \text{fixe Kosten} \\ &= q \cdot r + K_{\text{fix}} \end{aligned}$$

4.5.1 Einige wichtige ökonomische Funktionen

➤ Preis-Absatz-Funktion (PAF):

$$\text{Preis} = f(\text{Absatzmenge})$$

Nachfragefunktion (als Umkehrfunktion der PAF):

$$\text{Nachfragemenge} = f^{-1}(\text{Preis})$$

➤ Erlös-/Umsatzfunktion:

$$\text{Erlös} = \text{Preis} \cdot \text{Menge}$$

➤ Gewinnfunktion:

$$\text{Gewinn} = \text{Erlöse} - \text{Kosten}$$

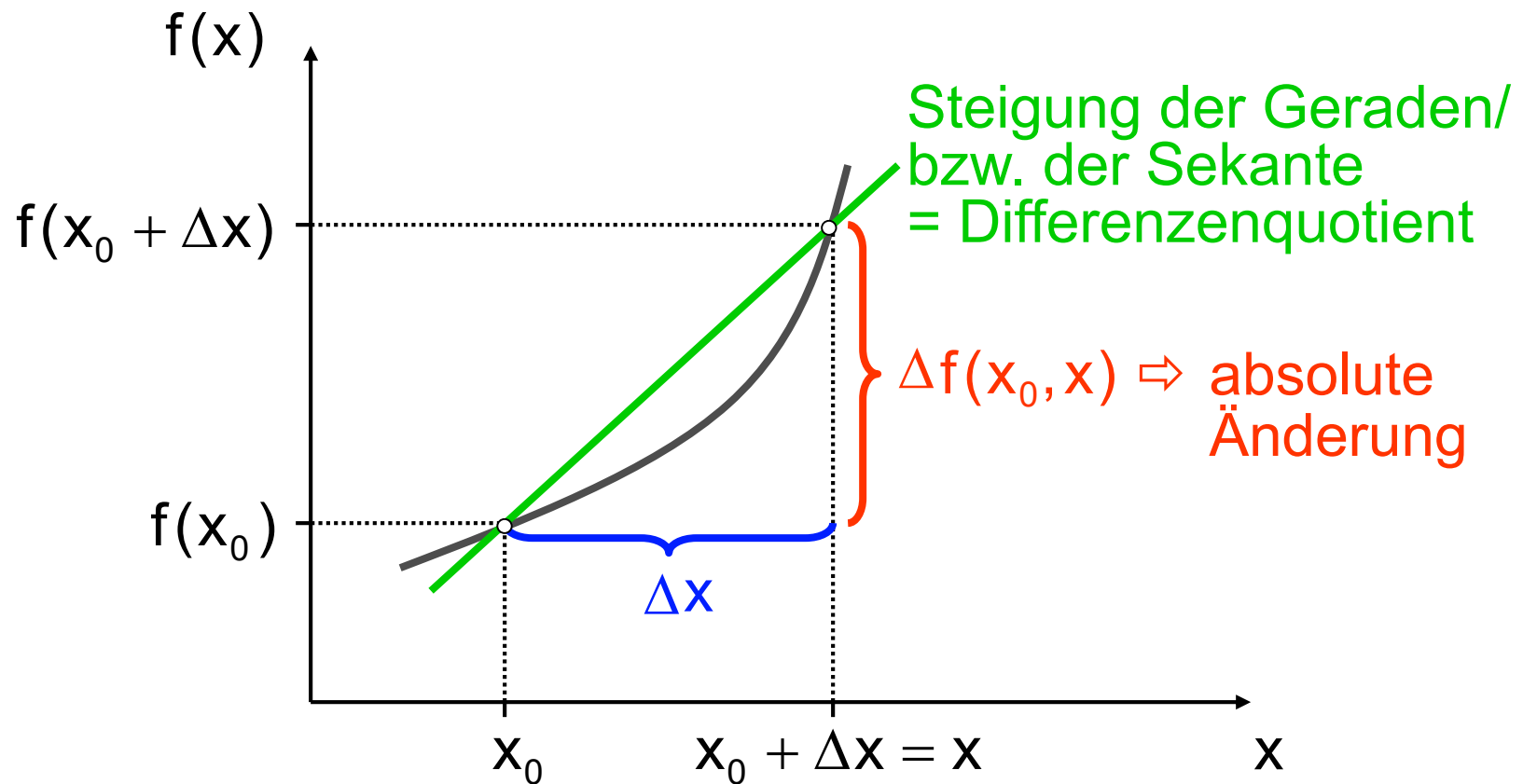
4.5.2 Die Break-Even-Analyse

- **Fragestellung** der Break-Even-Analyse:
 - Wann ist der **Gewinn gleich null**?
 - Wann entspricht der **Umsatz genau den Kosten**?
- **Prämissen** der Break-Even-Analyse:
 - Ein-Produkt-Unternehmen
 - Produktionsmenge = Absatzmenge
 - Konstanz der Daten im Zeitablauf
(Preis, fixe Kosten, variable Kosten usw.)

Gliederung

- 5 Differentialrechnung I:
Funktionen mit einer unabhängigen Variablen
 - 5.1 Einführendes Beispiel
 - 5.2 Grundzüge der Differentialrechnung
 - 5.2.1 Differenz, Differenzenquotient,
Differentialquotient und Differential
 - 5.2.2 Ableitungsregeln
 - 5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen
 - 5.4 Ökonomische Anwendung der Differentialrechnung
 - 5.4.1 Bestimmung und Interpretation von Extremwerten
ökonomischer Funktionen
 - 5.4.2 Ökonomische Maße

5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential



5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential

➤ Absolute Änderung:

$$\Delta f(x_0, x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

➤ Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

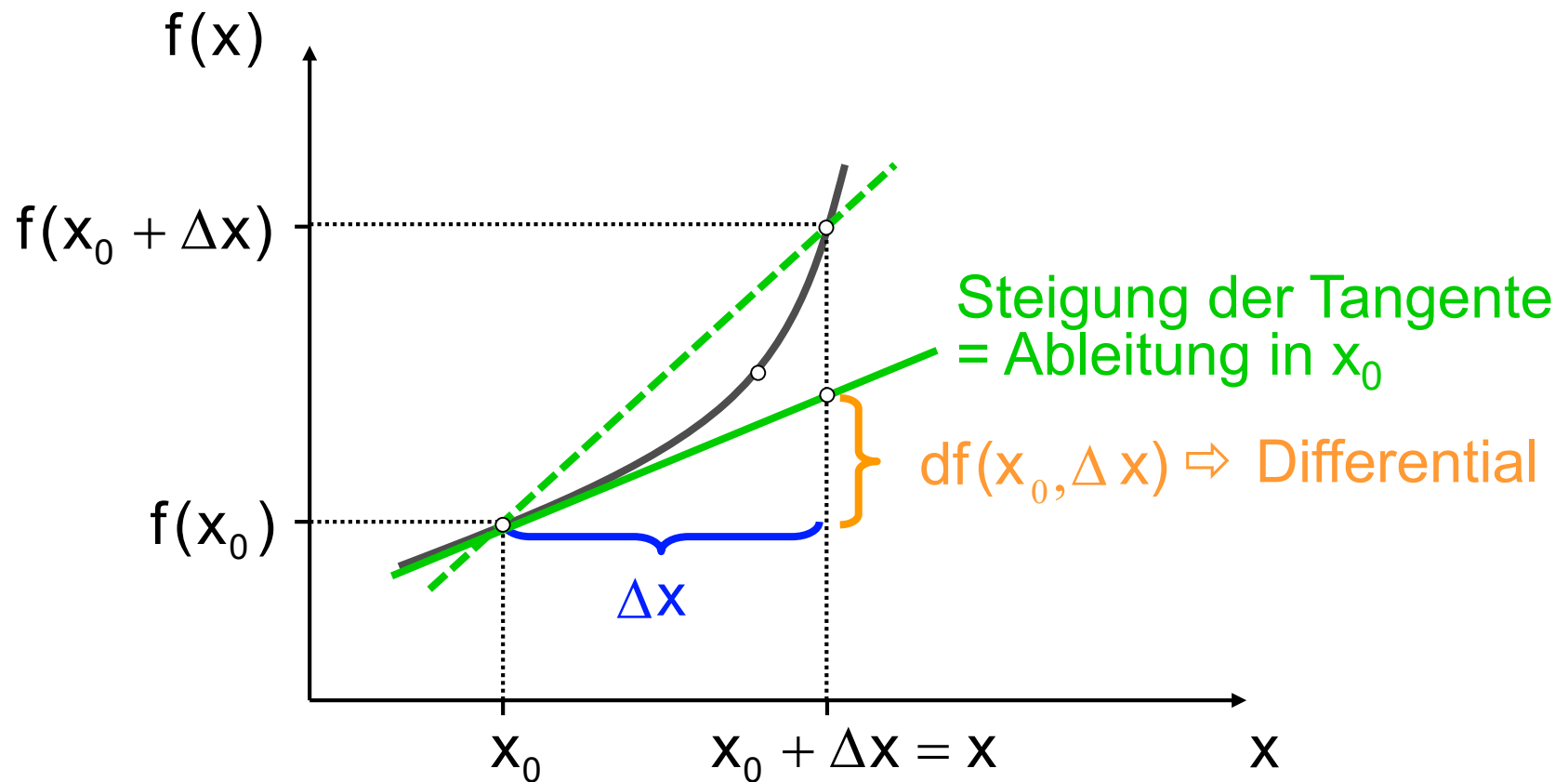
➤ Differentialquotient/Ableitung:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

➤ Differential:

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x \approx \Delta f(x_0, x) \quad 176$$

5.2.1 Differenz, Differenzenquotient, Differentialquotient und Differential



5.2.2 Ableitungsregeln

➤ Produktregel:

$$y = g(x) \cdot h(x) = g \cdot h \quad \Rightarrow \quad y' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

➤ Quotientenregel:

$$y = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g}{h} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

➤ Kettenregel:

$$y = g(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

5.2.2 Ableitungsregeln

➤ „Potenzregel“:

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}$$

➤ Faktorregel:

$$y = c \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot f'(x)$$

➤ Summenregel:

$$y = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad y' = g'(x) + h'(x)$$

5.2.2 Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

- Definitionslücken und Stetigkeit (siehe Kapitel 4)
- Beschränktheit (siehe Kapitel 4)
- Nullstellen (siehe Kapitel 4)
- Differenzierbarkeit
- Monotonieverhalten und Extremwerte
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte
- Graphische Darstellung (siehe auch Kapitel 4)

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

➤ Stetigkeit:

Rechtsseitiger und linksseitiger **Grenzwert** existieren und stimmen mit dem **Funktionswert** überein (siehe Kapitel 4):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in ID$$

➤ Differenzierbarkeit:

Grenzwert des Differenzenquotienten existiert (d.h. $\neq \pm\infty$) für alle Werte x_0 des Definitionsbereichs. Diesen Grenzwert bezeichnet man als die Ableitung von f (an der Stelle x_0) und schreibt $f'(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in ID$$

An den Randpunkten des Definitionsbereiches ist eine Funktion $f(x)$ nur einseitig differenzierbar.

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

➤ Monotonie:

- monoton steigend $:\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
- monoton fallend $:\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$
- streng monoton steigend $:\Leftrightarrow f'(x) > 0$
- streng monoton fallend $:\Leftrightarrow f'(x) < 0$

➤ Relative Extrema:

- relatives Maximum $:\Leftrightarrow \overset{!}{f'(x_{\text{opt}})} = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_{\text{opt}}) < 0$
- relatives Minimum $:\Leftrightarrow \overset{!}{f'(x_{\text{opt}})} = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_{\text{opt}}) > 0$

5.3 Diskussion algebraischer und transzendenter Funktionen

➤ Krümmungsverhalten:

■ konvex $:\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

■ konkav $:\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$

■ streng konvex $:\Leftrightarrow f''(x) > 0$

■ streng konkav $:\Leftrightarrow f''(x) < 0$

➤ Wendepunkte:

$$:\Leftrightarrow f''(x_{\text{opt}}) \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_{\text{opt}}) \neq 0$$

5.4.1.1 Das Cournot'sche Theorem

COURNOT'SCHES THEOREM:

Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x) \rightarrow \max!$$

Notwendige
Bedingung:

$$G'(x) = E'(x) - K'(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{E'(x)}_{\text{Grenz-erlöse}} = \underbrace{K'(x)}_{\text{Grenz-kosten}}$$



Hinreichende:
Bedingung

$$G''(x) = E''(x) - K''(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow E''(x) < K''(x)$$

5.4.2 Ökonomische Maße

➤ Bogenelastizität:

- ⇒ gibt das Verhältnis der relativen Änderung des Funktionswertes zur relativen Änderung der unabhängigen Variable an
- ⇒ gibt somit die durchschnittliche Elastizität im Intervall Δx an

$$\eta_{fx}(x_0) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

➤ Punktelastizität:

⇒ gibt näherungsweise an, **um wieviel Prozent** sich die **abhängige Variable** ändert bei einer **einprozentigen** Änderung der **unabhängigen Variablen**

⇒ **Grenzwert** der Bogenelastizität: Δx läuft gegen null

$$\begin{aligned}\varepsilon_{fx}(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta_{yx} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}\end{aligned}$$

➤ Elastizitätsfunktion:

$$\varepsilon_{fx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

➤ Ökonomische Beispiele:

⇒ Preiselastizität der Nachfrage

bzw. Elastizität der Nachfrage in bezug auf den Preis

$$p \rightarrow x = f(p) \qquad \varepsilon_{xp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$$

⇒ Nachfrageelastizität des Preise

bzw. Elastizität der Preis-Absatz-Funktion in bezug auf die nachgefragte Menge

$$x \rightarrow p = f(x) \qquad \varepsilon_{px} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}$$

5.4.2 Ökonomische Maße

Wert der Elastizität	Elastizitätsgrad der Funktion
$\varepsilon = 0$	vollkommen unelastisch
$0 < \varepsilon < 1$	inelastisch
$ \varepsilon = 1$	1-elastisch (proportional elastisch)
$ \varepsilon > 1$	elastisch
$ \varepsilon \rightarrow \infty$	vollkommen elastisch

Gliederung

6 Integralrechnung

6.1 Einführendes Beispiel

6.2 Die Integralrechnung als
Umkehrung der Differentialrechnung

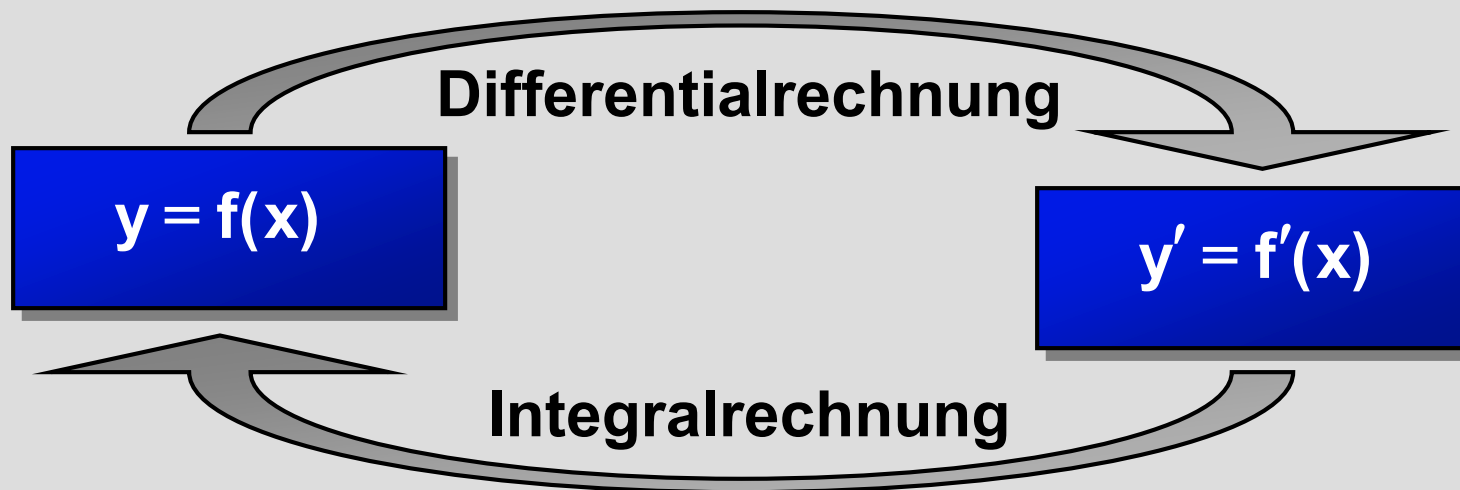
6.3 Unbestimmtes Integral

6.4 Bestimmtes Integral

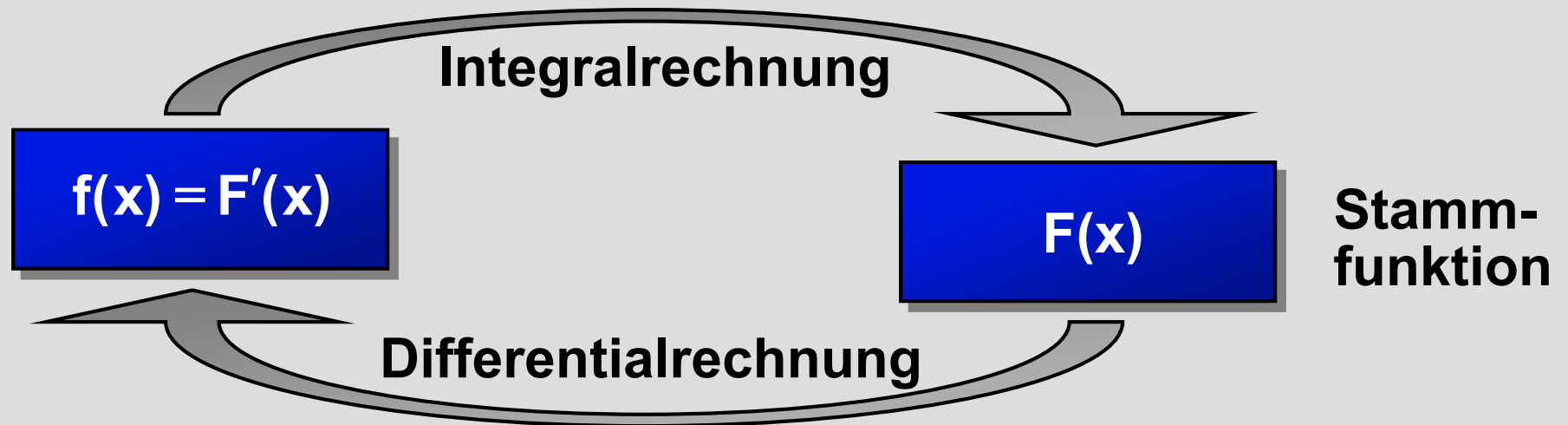
6.5 Bestimmung von Flächeninhalten
mit Hilfe des bestimmten Integrals

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung
(Produzenten- und Konsumentenrente)

6.2 Die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung



6.3.1 Der Begriff der Stammfunktion und des unbestimmten Integrals



Beispiel:

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 15$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 76$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2$$

6.3.1 Der Begriff der Stammfunktion und des unbestimmten Integrals

- F und f seien zwei Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich ID . F sei differenzierbar, und es gelte:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in ID$$

Dann nennt man F eine **Stammfunktion** von f .

- Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt **unbestimmtes Integral** und wird mit $\int f(x) dx$ bezeichnet.

Es gilt also:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

mit $f(x)$ als Integrand, x als Integrationsvariable und C als Integrationskonstante

6.3.2 Grundintegrale

Funktion	Stammfunktion
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \cdot \ln x - x + C$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Linearität:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

➤ Partielle Integration:

$$\int (g' \cdot f) dx = f \cdot g - \int (f' \cdot g) dx$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Substitutionsregel (Teil 1):

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$$

$$\text{mit } z = g(x); \quad \frac{dz}{dx} = g'(x) \quad \text{bzw.} \quad dz = g'(x) dx$$

➤ Substitutionsregel (Teil 2):

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(z)) \cdot g'(z) dz$$

$$\text{mit } x = g(z); \quad \frac{dx}{dz} = g'(z) \quad \text{bzw.} \quad dx = g'(z) dz$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Beispiel für eine Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{-2}{x-1} \right) dx$$

siehe **Nebenrechnung** auf
den nachfolgenden Seiten

$$= \int \frac{3}{x+2} dx - \int \frac{2}{x-1} dx$$

$$= 3 \cdot \ln|x+2| - 2 \cdot \ln|x-1| + C$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Nebenrechnung zur Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Methode „Einsetzen
spezieller Werte“:

$$\Leftrightarrow x-7 = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+2)$$

$$\Rightarrow A = \left. \frac{x-7}{x-1} \right|_{-2} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$B = \left. \frac{x-7}{x+2} \right|_1 = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{3}{x+2} + \frac{-2}{x-1}$$

6.3.3 Integrationsregeln

➤ Nebenrechnung zur Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Methode „Koeffizientenvergleich“:

$$\Leftrightarrow x-7 = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+2)$$

$$\Leftrightarrow x-7 = A \cdot x - A + B \cdot x + 2 \cdot B$$

$$\Rightarrow 1 = A + B$$

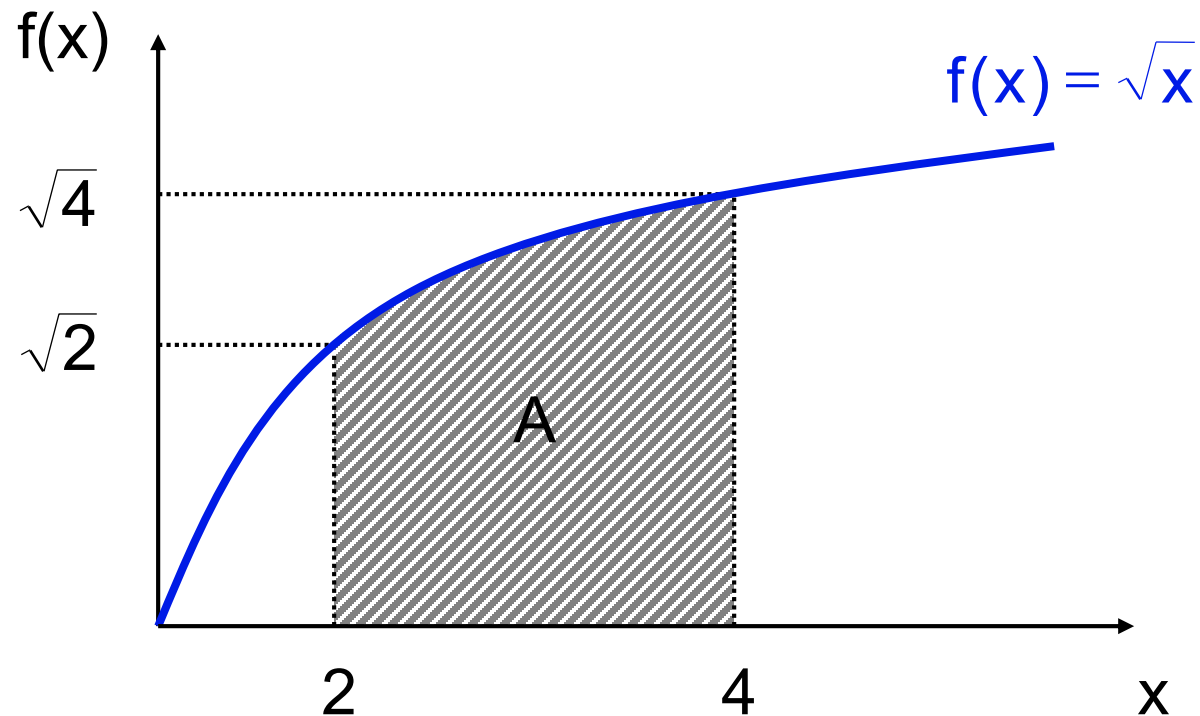
$$-7 = -A + 2 \cdot B$$

$$\Rightarrow A = 3 \quad \text{und} \quad B = -2$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{3}{x+2} + \frac{-2}{x-1}$$

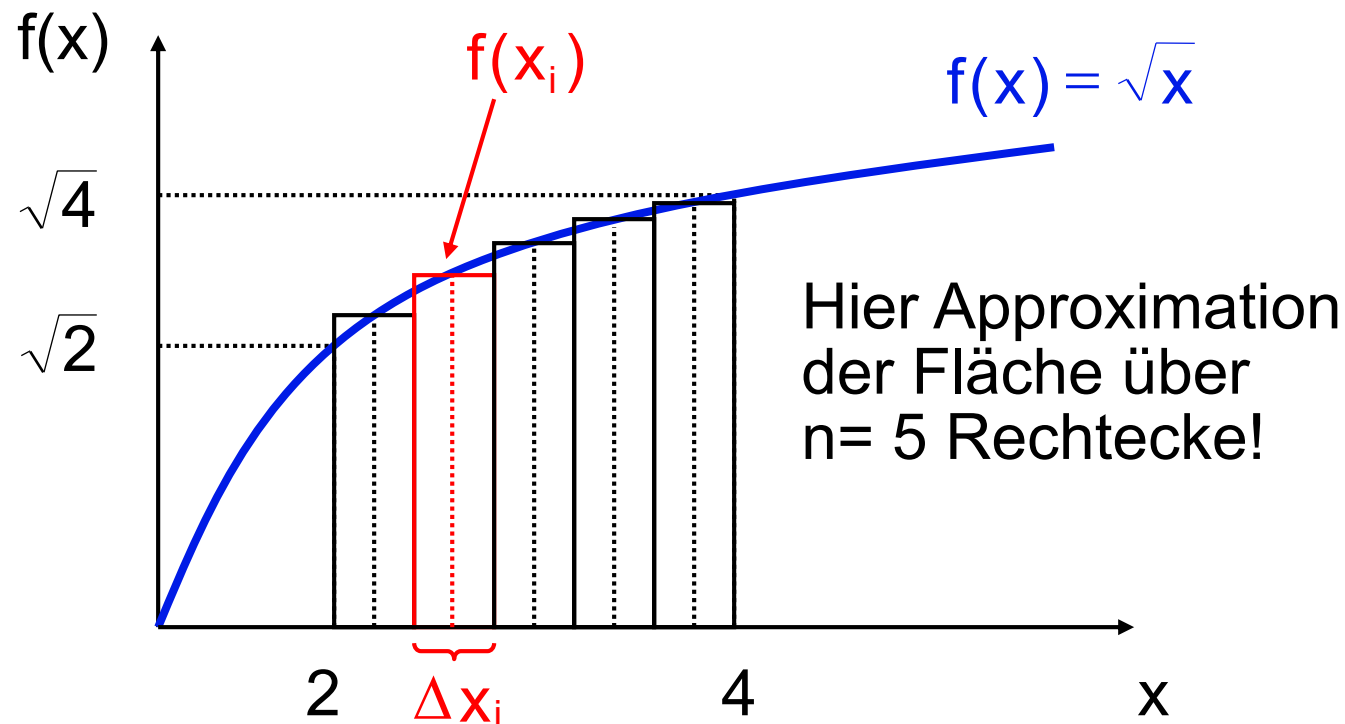
6.4.1 Der Begriff des bestimmten Integrals

➤ Flächeninhalte unter Kurven



6.4.1 Der Begriff des bestimmten Integrals

➤ Flächeninhalte unter Kurven



6.4.1 Der Begriff des bestimmten Integrals

- Für die **Fläche A** gilt somit:

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \quad (n \text{ ist die Anzahl der Rechtecke!})$$

- Ist $f(x)$ in $[a, b]$ stetig und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, so kann das **bestimmte Integral** auch wie folgt berechnet werden:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- **Beispiel:**

$$\int_2^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \approx 3,45$$

6.4.2 Rechenregeln für das bestimmte Integral

➤ Eigenschaften des bestimmten Integrals:

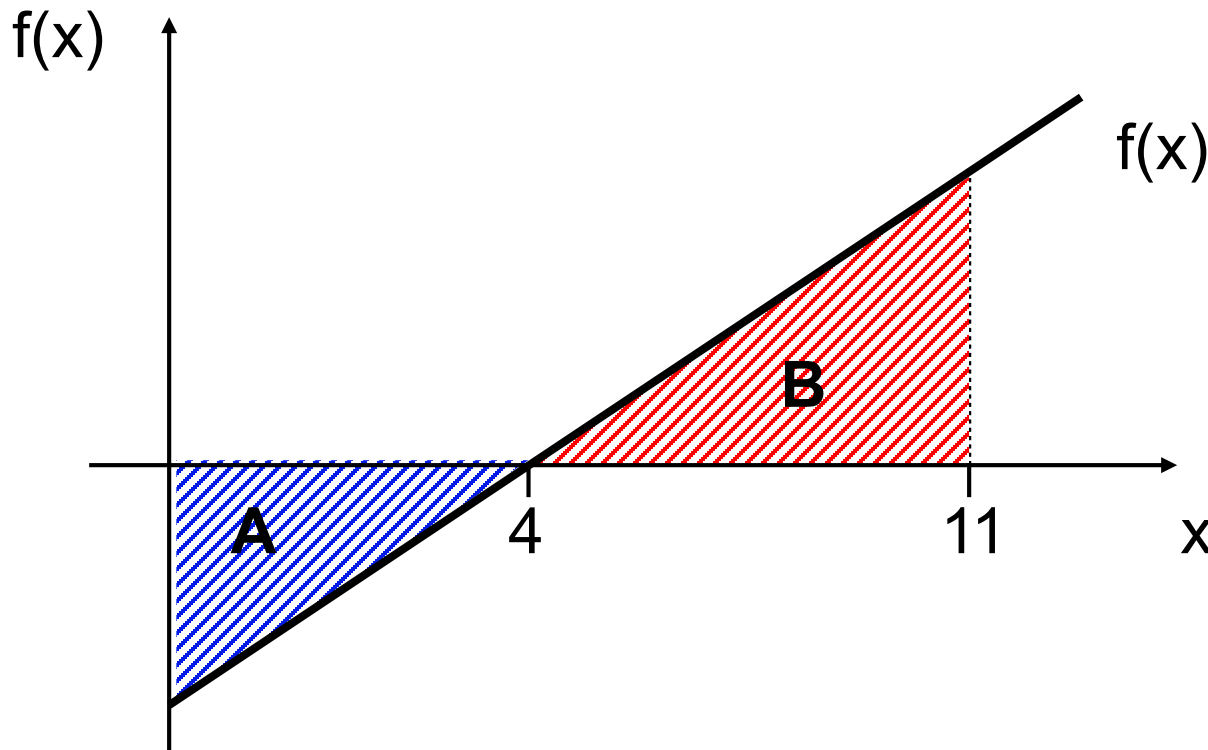
$$1. \quad \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$2. \quad \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

$$3. \quad \int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

➤ Im übrigen gelten die gleichen **Integrationsregeln** des Abschnitts 6.3.3.

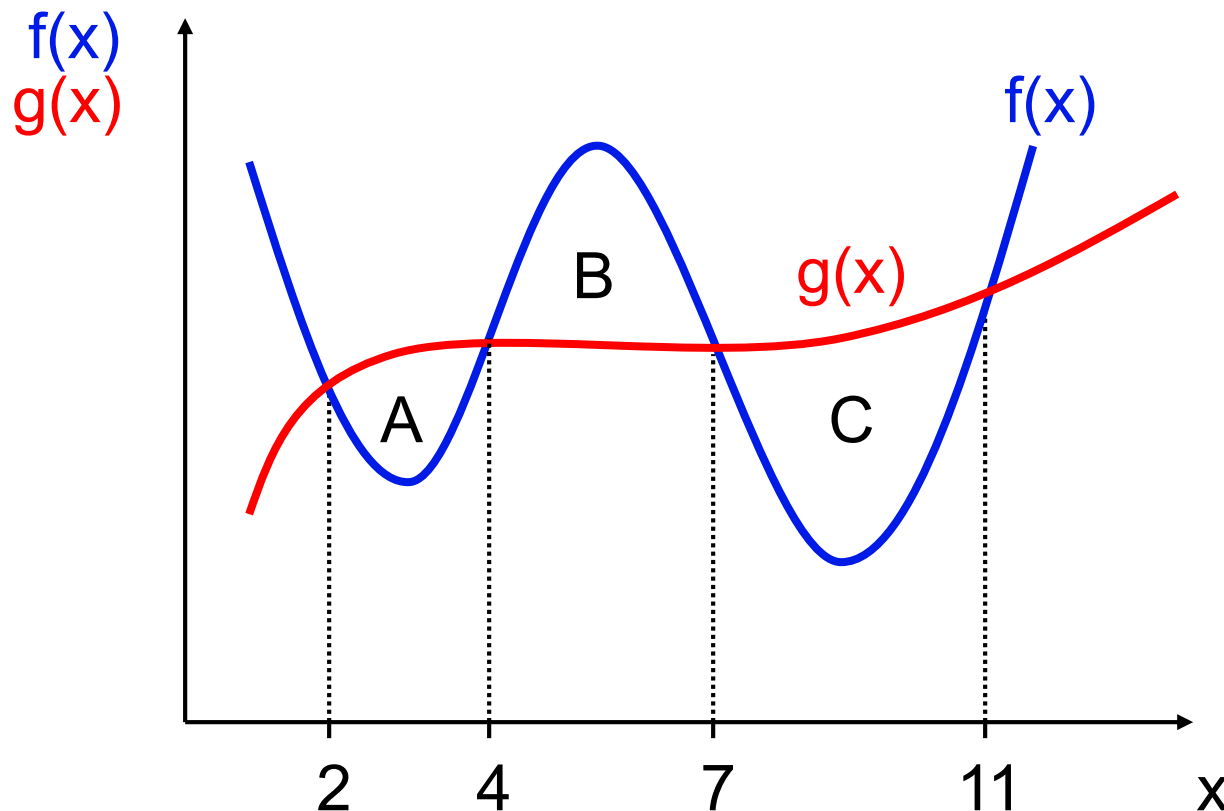
6.5.1 Flächenbestimmung zwischen Funktion und Abszisse



$$A + B =$$
$$+ \left| \int_0^4 f(x) dx \right|$$
$$+ \left| \int_4^{11} f(x) dx \right|$$

Beachte: Nicht über Nullstellen hinweg integrieren!

6.5.2 Flächenbestimmung zwischen zwei beliebigen Funktionen



$$A + B + C =$$

$$+ \left| \int_2^4 (g(x) - f(x)) dx \right|$$

$$+ \left| \int_4^7 (g(x) - f(x)) dx \right|$$

$$+ \left| \int_7^{11} (g(x) - f(x)) dx \right|$$

Beachte: Nicht über Schnittstellen hinweg integrieren!

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)

➤ Konsumentenrente:

⇒ Verzichtet der Anbieter eines Gutes auf eine stetige Preisreduktion von der Preisobergrenze p_0 bis zum Marktpreis p_M (Marktgleichgewicht), in dem sie sofort den Marktpreis p_M festsetzen, so sparen die Käufer die so genannte Konsumentenrente:

$$KR = \int_0^{x_M} p(x) dx - p_M \cdot x_M$$

6.6 Ökonomische Anwendung der Integralrechnung (Produzenten- und Konsumentenrente)

➤ Produzentenrente:

⇒ Die Produzentenrente fällt dann an, wenn ein Unternehmer ein bestimmtes Produkt zu verschiedenen Preisen entlang seiner Angebotskurve A anzubieten bereit ist, aber davon profitiert, daß der Marktpreis sich auf einer bestimmten Höhe p_M eingependelt hat (Marktgleichgewicht).

$$PR = p_M \cdot x_M - \int_0^{x_M} A \, dx$$

Gliederung

- 7 Differentialrechnung II:
Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen
 - 7.1 Einführendes Beispiel
 - 7.2 Graphische Einführung in die Differentialrechnung II
 - 7.3 Grundzüge der Differentialrechnung für Funktionen
mehrerer Variablen
 - 7.4 Ökonomische Anwendungen
 - 7.5 Optimierungstheorie

7.2.2 Horizontalschnitt und Höhenlinie

➤ **Horizontalschnitt** parallel zur (x_1, x_2) -Ebene

⇒ **Höhenlinie bzw. Isoquante**

⇒ gibt den Zusammenhang zweier unabhängiger Variablen (x_1, x_2) an für einen gegebenen Wert der abhängigen Variablen (y)

$$x_2 = f(\bar{y}, x_1) \quad \text{bzw.} \quad x_1 = f(\bar{y}, x_2)$$

➤ **Grenzrate der Substitution (Substitutionsrate)**

⇒ die **Steigung der Isoquante** in einem Punkt (im Beispiel: -2)

⇒ gibt die Einheiten an, die notwendig sind, um bei konstantem y eine infinitesimal kleine Einheit von x_2 durch x_1 zu ersetzen (oder umgekehrt)

$$\frac{dx_2}{dx_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx_1}{dx_2}$$

7.2.3 Vertikalschnitt

➤ Vertikalschnitt

⇒ Eine unabhängige Variable (z. B. x_1) wird konstant gesetzt. Analysiert wird der Zusammenhang zwischen der abhängigen Variable y und der anderen unabhängigen Variablen (z. B. x_2).

$$y = f(\bar{x}_1, x_2) \quad \text{bzw.} \quad y = f(x_1, \bar{x}_2)$$

➤ Grenzproduktivität (z.B. bei einer Produktionsfunktion)

⇒ gibt die marginale Veränderung der abhängigen Variablen y (z. B. die Ausbringungsmenge) an einer bestimmten Stelle an aufgrund einer infinitesimal kleinen Veränderung des einen Produktionsfaktors (x_1) bei Konstanz des anderen Produktionsfaktors (x_2) oder umgekehrt

$$\frac{dy}{dx_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx_2}$$

7.3.1 Partielle Ableitungen erster Ordnung, Gradient

➤ Partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2}(x_1, x_2)$$

➤ Gradient:

⇒ „Vektor der partiellen Ableitungen“

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

7.3.2 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung, Hessesche Matrix

➤ Partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \begin{cases} \nearrow f_{x_1 x_1} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_1} \\ \searrow f_{x_1 x_2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \end{cases}$$

$$f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \begin{cases} \nearrow f_{x_2 x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} \\ \searrow f_{x_2 x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_2} \end{cases}$$

7.3.2 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung, Hessesche Matrix

➤ Hessesche Matrix:

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{bmatrix}$$

bzw. für n Variablen:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

7.3.3 Partielle Differentiale und totales Differential

➤ Partielles Differential:

$$d_1 f = f_{x_1}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1$$

$$d_2 f = f_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$$

➤ Totales Differential:

⇒ Summe der partiellen Differentiale

$$\begin{aligned} df &= f_{x_1}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_1 + f_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \Delta x_2 \\ &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \end{aligned}$$

7.3.4 Partielle Elastizitäten

➤ Partielle Elastizitätsfunktionen:

$$\varepsilon_{yx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y}$$

$$\varepsilon_{yx_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y}$$

7.3.5 Homogenität

- Eine Funktion f ist **homogen vom Grade r** , wenn gilt:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^r \cdot f(x_1, x_2)$$

- Man unterscheidet folgende Fälle:

1. **überlinear-homogen**, falls $r > 1$
2. **linear-homogen**, falls $r = 1$
3. **unterlinear-homogen**, falls $r < 1$

- **Satz:**

Die Summe der partiellen Elastizitäten einer homogenen Funktion ist gleich dem Homogenitätsgrad!

7.5 Optimierungstheorie

Optimierungsrechnung

Zielfunktion $\rightarrow$ max!
 $\rightarrow$ min!

Zielfunktion $\rightarrow$ max!
 $\rightarrow$ min!

+ Nebenbedingung

Variablensubstitution

$f'(x) = 0$ bzw. $\text{grad } f = 0$
 $\Rightarrow$ stationäre Punkte

 $f''(x) \neq 0$ bzw. $H(x)$

Multiplikatormethode
von **LAGRANGE**

7.5.2 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen

1. Schritt: Bestimmen des stationären Punktes
(Notwendige Bedingung)
 - Bilde die partiellen Ableitungen erster Ordnung (Gradient) und setze diese gleich null!
 - Löse das so entstandene Gleichungssystem!
2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung
 - Bilde die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung (Hessesche Matrix)!
 - Bilde die Folge der Hauptminoren der Hesseschen Matrix!
 - Überprüfe anschließend anhand der nachfolgenden Kriterien, ob ein Maximum, ein Minimum oder überhaupt kein Extremum vorliegt!

7.5.2 Relative Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen ohne Nebenbedingungen

- Überprüfen der hinreichenden Bedingung:
Folge der Hauptminoren bilden!

- (1) $D_i > 0$ für alle $i \Rightarrow$ relatives Minimum
- (2) $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$... $\Rightarrow$ relatives Maximum
(alternierende Vorzeichen)
- (3) $D_i = 0$ für ein $i \Rightarrow$ keine Aussage möglich
- (4) sonst. $\Rightarrow$ kein Extremwert

Hauptminoren:

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11} \quad a_{12}}^{D_1} \quad \overbrace{a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}}^{D_2} \\ \overbrace{a_{21} \quad a_{22}}^{D_1} \quad \dots \quad a_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.5.3.2 Methode der Variablensubstitution

1. Schritt: Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen
2. Schritt: Aufstellen der reduzierten Zielfunktion durch Substitution der einen Variablen durch die andere (unter Zuhilfenahme des Schrittes 1)
3. Schritt: Bestimmen des stationären Punktes (Notwendige Bedingung)
4. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

1. Schritt: Aufstellen der Lagrange-Funktion für $n = 2$ Variablen und $m = 1$ Nebenbedingungen
 - Löse die Nebenbedingung nach null auf.
 - Multipliziere die so entstandene Nebenbedingung mit λ und hänge den Ausdruck an die ursprüngliche Zielfunktion.
 - λ bezeichnet man als Lagrange-Multiplikator.
2. Schritt: Bestimmen des stationären Punktes
(Notwendige Bedingung)
3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung
(Bilde dazu die letzten $n - m = 2 - 1 = 1$ Hauptminoren)

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

- Überprüfen der hinreichenden Bedingung:
Bilde die letzten $n - m = 1$ Hauptminoren!
 - ⇒ Hat der Hauptminor D_3 ein negatives Vorzeichen,
so existiert ein relatives Minimum.
 - ⇒ Hat der Hauptminor D_3 ein positives Vorzeichen,
so existiert ein relatives Maximum.
 - ⇒ Ist der Hauptminor D_3 gleich null,
so ist keine Aussage möglich.

(Diese Aussagen gelten nur für $n = 2$ Variablen
und $m = 1$ Nebenbedingung!)

7.5.3.3 Multiplikatormethode von Lagrange

- Überprüfen der hinreichenden Bedingung (allgemeingültiger Exkurs): Bilde die letzten $n - m = 1$ Hauptminoren!
 - ⇒ Haben sämtliche Hauptminoren $D_{2 \cdot m+1}, D_{2 \cdot m+2}, \dots, D_{m+n}$ das Vorzeichen $\text{sgn}(-1)^m$, so existiert ein **relatives Minimum**.
 - ⇒ Haben sämtliche Hauptminoren $D_{2 \cdot m+1}, D_{2 \cdot m+2}, \dots, D_{m+n}$, beginnend mit $\text{sgn} D_{2 \cdot m+1} = \text{sgn}(-1)^{m+1}$, alternierende Vorzeichen, so hat die Funktion ein **relatives Maximum**.
 - ⇒ Ist wenigstens eine der oben genannten Bedingungen dadurch verletzt, daß der betreffende Hauptminor genau das Vorzeichen anderer Art besitzt, so liegt **kein relatives Extremum** vor.
 - ⇒ Ist einer der Hauptminoren gleich null, so ist **keine Entscheidung** möglich.

Das war's!

**Viel Erfolg
bei der Klausur!**

Prof. Dr. Michael Bucker
FHZ, Raum C 521
michael.buecker@fh-muenster.de
+49(0)251/83-65615