

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.1: Rechnen mit Klammern

Berechnen Sie:

a) $(a+b)-(b+c)-(a-b-c)$

b) $(4m+5n-6p)-(2m+3n-2p-7q)-(6q-4p+2n)$

c) $3x - \{z - (2x+y) - [5x - (3x-y+z)]\}$

d) $2a - \{4b - [3b - (3a-7c)] + [2b - (4a-5c)]\}$

e) $(a+2b) \cdot (c-3d) + 3d \cdot (a+2b)$

f) $-2 \cdot [3x + (5y-2) \cdot x]$

g) $(a+2b) \cdot (2a-4b)$

Aufgabe 1.2: Bruchrechnen

Fassen Sie die folgenden Brüche zu einem Bruch zusammen oder vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{-1}{12}$

b) $\frac{3}{7} + \frac{2}{14} - \frac{5}{21}$

c) $\frac{2a}{3} + \frac{6b-a}{5} - \frac{2a-2b}{15}$

d) $\frac{2}{x} - \frac{4}{3} - \frac{3-8x}{6x}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

$$e) -\left(\frac{2-3x-6y}{3} - \frac{-4y-2x}{4}\right) - \frac{x+2y}{2}$$

$$f) \frac{\frac{3ab}{7cx}}{\frac{6ay}{14cd}}$$

$$g) \frac{1 + \frac{a}{b}}{\frac{a+b}{a}}$$

$$h) \frac{\frac{\frac{x}{y}-1}{x}}{x+y} \cdot xy$$

Aufgabe 1.3: Absolutbetrag

Berechnen Sie für $a = -3$ und $b = -7$ sowie $c = 4$ die folgenden Ausdrücke:

$$a) |a-b|$$

$$b) |a| - |b|$$

$$c) |b \cdot c| - |a|$$

$$d) \left| \frac{a-c}{2 \cdot b} \right| - \left| \frac{c}{a} \right|$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.4: Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

Vereinfachen Sie die folgenden Terme!

a) $\sqrt[5]{x^{15}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^2}}$

c) $\sqrt[4]{x^8 \cdot y^{12}}$

d) $\sqrt[6]{\frac{a^6 \cdot b^6}{c^{12} \cdot d^{18}}}$

e) $x^{n-2} \cdot x^{2n+5} \cdot x^{m-3}$

f) $\left(\frac{1}{x^{-2}}\right)^{-3}$

g) $\frac{\sqrt[3]{x^5 \cdot y^2 \cdot z^8}}{\sqrt[5]{x^2 \cdot y \cdot z^6}}$

h) $\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}$

i) $\sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[3]{b^4}}$

j) $\left(2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)^2$

k) $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

$$l) \frac{\sqrt{m^2 - 4 \cdot m \cdot n + 4 \cdot n^2}}{m^2 - 4 \cdot n^2}$$

$$m) \frac{\sqrt[n]{x^{n-3}} \cdot (\sqrt[n]{x})^{2n+1}}{\sqrt[n]{x^{2n-2}}}$$

$$n) \ln\left(e \cdot \frac{t}{y}\right)$$

$$p) \lg\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}{10}\right)^6$$

$$q) \log_a \frac{\sqrt[3]{r \cdot s^2 \cdot t^3}}{\sqrt{r^3 \cdot s^2 \cdot t}}$$

Aufgabe 1.5: Gleichungen in einer Variablen

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge:

$$a) \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-3}{x-5}$$

$$b) 2 \cdot \sqrt{5-x} = 3 \cdot \sqrt{8+x}$$

$$c) 3 \cdot \sqrt{25-x} + 2 = 4 \cdot \sqrt{25-x}$$

$$d) 16 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 20 = 0$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

e) $\sqrt{x+13} = x+1$

f) $\sqrt{8+x} + \sqrt{5-5x} = \sqrt{17-8x}$

g) $\sqrt{16^{2x-2}} = 2^{3x+3}$

h) $\sqrt{52+4x} + \sqrt{52-4x} = 12$

i) $\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2x-1}$

j) $\sqrt{5x-56} = \sqrt{x+12} - \frac{10}{\sqrt{x+12}}$

k) $2 \cdot x^4 - 52 \cdot x^2 + 50 = 0$

l) $-\frac{1}{4} \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 + 16 = 0$

m) $x^5 - 7 \cdot x^4 + 6 \cdot x^3 = 0$

n) $4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 - 52 \cdot x + 60 = 0$

p) $x^4 - 2 \cdot x^3 - 13 \cdot x^2 + 38 \cdot x - 24 = 0$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.6: Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $8x - 7 < 3x + 3$

b) $\frac{6}{x} < 3$

c) $\frac{10}{2x + 6} > -1$

d) $\frac{2x - 4}{x + 3} > 1$

e) $|2x + 8| < 4$

f) $|x - 7| < 1$

Aufgabe 1.7: Summenzeichen

Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum_{i=1}^4 (i + 1)$

b) $\sum_{i=3}^8 (i - 1)$

c) $2 \cdot \sum_{j=2}^5 j^2$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

d) $\sum_{n=2}^5 \frac{n+1}{n-1}$

e) $\sum_{i=4}^7 \sum_{j=1}^3 (i-j)$

f) $\sum_{i=1}^5 3$

g) $\sum_{j=3}^{10} 8$

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

h) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 25$

i) $4^3 + 5^3 + 6^3 + \dots + 24^3$

j) $a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_5 + \dots + a_{10}b_{11}$

k) $3x^2y^4 + 4x^3y^6 + 5x^4y^8 + \dots + 21x^{20}y^{40}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.8: Gleichheit von Mengen (Mengenlehre)

Welche der folgenden Mengen sind gleich?

$$A_1 := \{0\}$$

$$A_2 := \emptyset$$

$$A_3 := \{\emptyset\}$$

$$A_4 := \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2 = 0\}$$

$$A_5 := \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge 4 \cdot x + 15 = 7\}$$

$$A_6 := \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 2 \cdot x = 0\}$$

$$A_7 := \{-2\}$$

$$A_8 := \{2\}$$

$$A_9 := \{-2; 2\}$$

$$A_{10} := \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 = 4\}$$

$$A_{11} := \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^3 + 8 = 0\}$$

$$A_{12} := \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2\}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.9: Element und Teilmenge (Mengenlehre)

Es sei $A := \{1, 3, \{3\}, \{5\}, \{5, 6\}, \{3, \{3\}\}\}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- a) $\{5\} \subset A$
- b) $\{5, 6\} \in A$
- c) $\{1\} \in A$
- d) $\{\{3\}\} \subset A$
- e) $\{3, \{5, 6\}\} \subset A$
- f) $\{\{5\}, \{5, 6\}\} \in A$
- g) $\{5, \{5, 6\}\} \subset A$
- h) $(\{\{5, 6\}, \{3, \{3\}\}\} \cup \{3\}) \subset A$

Aufgabe 1.10: Operationen zwischen Mengen (Mengenlehre)

Gegeben sind die Mengen

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A := \{1, 3, 4, 5, 8, 10\}$$

$$B := \{2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$C := \{1, 2, 5, 7, 8\}$$

$$D := \{4, 5\}$$

Bestimmen Sie

- a) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
- b) $\overline{B}_M \setminus (A \cap \overline{C}_M)$
- c) $\overline{D}_A \cap (B \setminus C)$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.11: Studentenparlament (Mengenlehre)

Während der Wahlen zum Studentenparlament wurden 60 Studentinnen und 52 Studenten befragt, ob sie bereits von ihrem Wahlrecht Gebrauch gemacht hätten. 75 der befragten Personen bejahten die gestellte Frage, unter diesen waren 38 Studentinnen.

Wie viele der befragten Studenten hatten zum Umfragezeitpunkt noch nicht von ihrem Wahlrecht Gebrauch gemacht?

Aufgabe 1.12: Sprachkenntnisse (Mengenlehre)

Bei einer Stellenausschreibung werden Kenntnisse in mindestens einer der Sprachen Französisch, Italienisch oder Spanisch verlangt. Von insgesamt 104 Bewerbern können 36 nur Französisch, 23 nur Italienisch und 11 nur Spanisch. 31 der Bewerber beherrschen genau zwei Sprachen.

- a) Wie viele der Bewerber können alle drei Sprachen?
- b) Wie viele der Bewerber können nur Italienisch und Spanisch, falls 65 der Bewerber Französisch können?

Aufgabe 1.13: Einkunftsquellen von Studenten (Mengenlehre)

500 Studenten wurden nach ihren Einkunftsquellen befragt. 50 Studenten leben ausschließlich vom BAFÖG. Geld von ihren Eltern erhalten 140 Studenten. BAFÖG und Arbeitslohn empfangen 210 Studenten, die jedoch kein Geld von ihren Eltern bekommen. Von den arbeitenden Studenten bekommen 135 kein BAFÖG. Einer Beschäftigung gingen insgesamt 351 Studenten nach. Von diesen erhalten 41 Geld von ihren Eltern. Die Anzahl der Studenten, die BAFÖG erhalten, ist um 110 höher als die, die keins erhalten.

Wie viele Studenten werden ausschließlich durch ihre Eltern finanziert?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.14: Graphen von Funktionen (Abbildungen)

Stellen Sie die nachstehend angegebenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bezüglich eines kartesischen *Koordinatensystems* dar:

a) $R_1 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y = x\}$

b) $R_2 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\}$

c) $R_3 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \wedge y = x^2\}$

d) $R_4 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = y^3\}$

e) $R_5 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = x^3\}$

f) $R_6 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = \sqrt{x}\}$

g) $R_7 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}_{> 0} \wedge y = e^x\}$

h) $R_8 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}_{> 0} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = \ln x\}$

i) $R_9 := \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \wedge y \in [-1, 1] \wedge x^2 + y^2 = 1\}$

j) $R_{10} := \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \wedge y \in [-1, 0] \wedge x^2 + y^2 = 1\}$

Welche dieser Mengen beschreibt keine *Abbildung*? Welche dieser Mengen lassen sich als Graphen von *reellen Funktionen* $f: A \rightarrow B$ mit $x \rightarrow y = f(x)$ auffassen? Wie lauten gegebenenfalls diese Funktionen? Welche der Funktionen sind *injektiv*, *surjektiv*, *bijektiv*?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.15: Definitions-, Bild- und Wertebereich (Abbildungen)

Gegeben seien die Graphen zweier Abbildungen:

$$\text{graph } f := \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_3), (x_4, y_5), (x_5, y_5)\}$$

$$\text{graph } g := \{(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_4), (y_4, z_4), (y_5, z_5)\}$$

- Veranschaulichen Sie die Abbildungen f und g durch Pfeildiagramme!
- Welches sind die Definitionsbereiche und welches die Bildbereiche der Abbildungen f und g ? Kann man $W_f := \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ bzw. $W_g := \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ als Wertebereiche der Abbildungen f bzw. g zugrunde legen?
- Sind die Abbildungen f und g injektiv, surjektiv, bijektiv?
- Bestimmen Sie $\text{graph } g \circ f$ durch Aufzählung der zugehörigen Paare und stellen Sie $g \circ f$ in einem Pfeildiagramm dar! Wie lauten Definitions- und Wertebereich von $g \circ f$?

Aufgabe 1.16: Komposition von Funktionen (Abbildungen)

Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow y = f(x) = x^2 - 1$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } y \rightarrow z = g(y) = 3 \cdot y + 2$$

Geben Sie die Funktionen $g \circ f$ an!

Aufgabe 1.17: Produktionsstraße (Abbildungen)

Eine Produktionsstraße bestehe aus den Maschinengruppen $M := \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ und $N := \{n_1, n_2\}$, wobei die zu einer Maschinengruppe gehörigen Maschinen gleichartig seien. Jedes Produkt muss die Maschinengruppen in der Reihenfolge M, N durchlaufen. Aus organisatorischen Gründen ist vorgeschrieben, dass die von m_1 und m_2 bearbeiteten Produkte zur Maschine n_1 gehen und die anderen nach n_2 .

- Charakterisieren Sie den Durchlauf durch die Maschinengruppen mittels einer Abbildung $f: M \rightarrow N$, welche die Zuordnung der auf den Maschinen der Gruppe M bearbeiteten Produkte zu den Maschinen der Gruppe N wiedergibt!
- Bestimmen Sie $\text{graph } f$!
- Ist die Abbildung f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.18: Elektrizitätswerk (Abbildungen)

Ist y die Anzahl der monatlich von einem Elektrizitätswerk an die Verbraucher abgegebenen kWh, so seien die dem Elektrizitätswerk entstehenden Gesamtkosten z gegeben durch die Funktion:

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } y \rightarrow z = g(y) = 5 + 0,3 \cdot y - 0,2 \cdot y^2 + 0,1 \cdot y^3$$

Andererseits hängt die abgegebene elektrische Energie y u.a. von der Anzahl x der von diesem Elektrizitätswerk versorgten Haushalte ab. Diese Abhängigkeit sei wiedergegeben durch die Funktion:

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow y = f(x) = 20 \cdot x^2 + 50 \cdot x$$

Bestimmen Sie die dem Elektrizitätswerk entstehenden Gesamtkosten als Funktion der Anzahl der angeschlossenen Haushalte!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.1:

Gegeben seien die Matrizen

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $A_{3 \times 3} + B_{3 \times 3}$, $B_{3 \times 3} - A_{3 \times 3}$ und $A_{3 \times 3} - B_{3 \times 3}$!

Aufgabe 2.2:

Gegeben seien die Matrizen

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie $(A_{3 \times 3} + B_{3 \times 3})^T$!

b) Zeigen Sie durch Ausrechnen, dass $(A_{3 \times 3} + B_{3 \times 3}^T)^T = A_{3 \times 3}^T + B_{3 \times 3}$!

Aufgabe 2.3:

Bestimmen Sie x und y so, dass gilt:

$$\begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ -1 & 3 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.4:

Es sei:

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Wie muss die Matrix $X_{2 \times 2}$ gewählt werden, damit gilt:

$$2 \cdot A_{2 \times 2} + B_{2 \times 2} \cdot C_{2 \times 2} + X_{2 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

Aufgabe 2.5:

Gegeben seien die Matrizen

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad C_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Man berechne, falls möglich:

- a) $2 \cdot B_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 3}$
- b) $A_{2 \times 3} + C_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}$
- c) $A_{2 \times 3} \cdot C_{3 \times 2} - 3 \cdot B_{2 \times 2}$
- d) $(A_{2 \times 3})^2 - 3 \cdot B_{2 \times 2}$
- e) $A_{2 \times 3}^T + 2 \cdot C_{3 \times 2}$

Aufgabe 2.6:

Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\text{a) } A_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{bmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

$$\text{b) } B_{5 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 9 & -6 \\ 1 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 2 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2.7:

Welches der folgenden Gleichungssysteme ist nicht lösbar?

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 &= 2 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &= 6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 &= 2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.8:

Lösen Sie mit dem Gauß-Algorithmus:

a)

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 2$$

$$x_1 + x_3 = 2$$

$$2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$$

b)

$$x_1 + 2 \cdot x_3 = 1$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 2$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = -2$$

Aufgabe 2.9:

Lösen Sie mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Elimination:

a)

$$3 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 = 3$$

b)

$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 18$$

$$4 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = 55$$

$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 27$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.10:

Bestimmen Sie, falls möglich, die Inverse der folgenden Matrizen:

a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Aufgabe 2.11:

Zeigen Sie durch Ausrechnen beider Seiten der betreffenden Matrizengleichungen, dass für die Matrizen

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

die nachstehenden Matrizengleichungen gelten:

a) $\left(A_{2 \times 2}^{-1}\right)^T = \left(A_{2 \times 2}^T\right)^{-1}$

b) $\left(A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}\right)^{-1} = B_{2 \times 2}^{-1} \cdot A_{2 \times 2}^{-1}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.12:

Die beiden nachfolgenden Matrizen sind invers zueinander:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a & b & -1 \\ 1 & 0 & c \\ b & 2 & c \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_{3 \times 3}^{-1} = \begin{bmatrix} a & d & 1 \\ e & e & 0 \\ c & f & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Werte für a, b, c, d, e und f!

Aufgabe 2.13:

Berechnen Sie:

a) $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.14:

Es sei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie durch Ausrechnen:

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

b) $\det(B) = \det(B^T)$

c) $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$

Aufgabe 2.15:

Berechnen Sie mit Hilfe der adjungierten Matrix die Inverse!

a) $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 2.16:

a) Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit Hilfe der Matrixinversion!

$$x_1 + 3 \cdot x_3 = 40$$

$$x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 20$$

$$x_2 + 2 \cdot x_3 = 30$$

b) Welche Lösung ergibt sich, wenn der Vektor der rechten Seite nicht mehr $(40 \ 20 \ 30)^T$, sondern $(50 \ 15 \ 45)^T$ lautet?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.17:

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerschen Regel!

a)

$$3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 4$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 = 4$$

b)

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 40$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 46$$

$$x_2 + 2 \cdot x_3 = 15$$

c)

$$x_1 - 2 \cdot x_3 = 1$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 2$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = -2$$

Aufgabe 2.18:

Es sei folgendes System von Ungleichungen gegeben:

$$x + y \geq 2$$

$$\wedge 0 \leq x \leq 1$$

$$\wedge 0 \leq y \leq 1$$

Die zu maximierende Zielfunktion lautet: $Z(x, y) = 1 \cdot x + 4 \cdot y$

a) Bestimmen Sie graphisch die optimale Lösung!

b) Wie lautet die optimale Lösung, wenn die letzte Nebenbedingung nicht $y \leq 1$,

sondern $y \leq \frac{3}{2}$ lautet?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.19:

Eine Unternehmung stellt zwei verschiedene Enderzeugnisse E_1 und E_2 aus drei Zwischenprodukten Z_1 , Z_2 und Z_3 her. Die Zwischenprodukte werden aus vier Rohstoffen R_1 , R_2 , R_3 und R_4 gefertigt. Die Produktionskoeffizienten sind den beiden nachfolgenden Tabellen zu entnehmen. Sie geben an, wie viele Einheiten eines Rohstoffes (bzw. Zwischenproduktes) zur Herstellung eines Zwischenproduktes (bzw. Enderzeugnisses) benötigt werden.

Matrix A	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	4	0
R_2	2	0	5
R_3	2	3	1
R_4	0	1	6

Matrix B	E_1	E_2
Z_1	3	7
Z_2	4	2
Z_3	2	1

Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung für jede Einheit der Enderzeugnisse E_1 und E_2 die zugehörige Anzahl der verschiedenen erforderlichen Rohstoffeinheiten!

Aufgabe 2.20:

Eine Unternehmung stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess zwei verschiedene Enderzeugnisse E_1 und E_2 her. Die beiden nachfolgenden Produktionsmatrizen geben den Rohstoffbedarf (in kg) pro Mengeneinheit (ME) des Zwischenproduktes Z_1 , Z_2 und Z_3 bzw. den Bedarf an Zwischenprodukten (in Stück) pro Einheit des Endproduktes E_1 und E_2 an.

Matrix A	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	3	1	2
R_2	2	3	4

Matrix B	E_1	E_2
Z_1	3	1
Z_2	0	3
Z_3	1	2

Die Rohstoffpreise betragen pro kg R_1 2 € und pro kg R_2 4 €. Die Verkaufspreise für die Endprodukte betragen 80 € für E_1 und 100 € für E_2 .

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

- a) Bestimmen Sie die Rohstoffeinsatzmengen pro Einheit der beiden Endprodukte E_1 und E_2 !
- b) Welche Rohstoffkosten entstehen pro Stück der beiden Endprodukte?
- c) Welche Rohstoffmengen benötigt man für eine Tagesproduktion von 10 Mengeneinheiten E_1 und 5 Mengeneinheiten E_2 ?
- d) Welchen Erlös und welchen Gewinn erzielt man für eine Tagesproduktion?

Aufgabe 2.21:

Die Herstellung der drei Produkte P_1 , P_2 und P_3 erfordert ihre Bearbeitung auf den Maschinen M_1 , M_2 und M_3 . Die Bearbeitungszeiten t_{ij} für das Produkt P_j auf Maschine M_i , $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sowie die maximale Verfügbarkeitszeit der Maschinen pro Woche sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

t_{ij}	P_1	P_2	P_3	Verfügbarkeit
M_1	3	1	2	80
M_2	1	3	1	85
M_3	2	1	4	100

- a) Bestimmen Sie den Produktionsplan, bei dem die Kapazitäten der Maschinen voll ausgenutzt werden!
- b) Es werde geplant, das Produkt P_2 durch das Produkt P_2^* mit dem Bearbeitungszeitvektor $[1; 5; 3]^T$ zu ersetzen. Wie lautet jetzt das unter voller Ausnutzung der Produktionskapazitäten realisierbare Produktionsprogramm, falls unbegrenzte Teilbarkeit der Produkte unterstellt wird?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.22:

Die Herstellung der drei Produkte P_1 , P_2 und P_3 erfolgt auf den drei Maschinen M_1 , M_2 und M_3 . Die nachfolgende Tabelle gibt die Bearbeitungszeiten der drei Erzeugnisse auf den drei Maschinen sowie die verfügbaren Maschinenkapazitäten wieder.

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
M_1	1	1	3	20
M_2	1	2	3	23
M_3	1	0	2	13

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrixinversion dasjenige Fertigungsprogramm x_1 , x_2 , x_3 (x_i = Anzahl der herzustellenden Einheiten der Produkte P_i), bei dem sämtliche Maschinen vollständig ausgelastet sind!
- b) Die Maschinenkapazitäten sollen in zwei Schritten um jeweils 1 Einheit pro Maschine erhöht werden. Die verfügbaren Kapazitäten betragen somit nach der ersten Kapazitätserhöhung 21, 24 und 14 Stunden und nach der zweiten Anpassung 22, 25 und 15 Stunden auf den Maschinen M_1 , M_2 und M_3 .

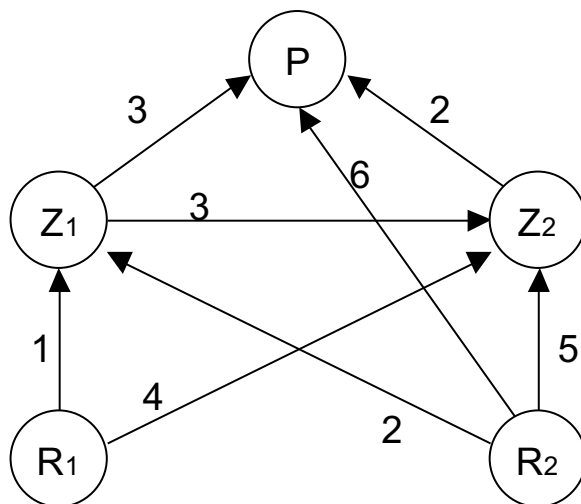
Welches Fertigungsprogramm lässt sich unter der Annahme vollständiger Kapazitätsauslastung nach den beiden Kapazitätserhöhungen jeweils verwirklichen?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.23:

Ein Unternehmen stellt ein Endprodukt P her aus zwei Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 . In diese beiden Zwischenprodukte gehen die beiden Rohstoffe R_1 und R_2 ein. Die für die einzelnen Produktionsstufen benötigten Mengeneinheiten (ME) sind in dem nachstehendem Gozinto-Graphen angegeben:



Von dem Produkt P sind insgesamt 200 ME pro Tag herzustellen. Ermitteln Sie die für diese Endproduktion erforderlichen Mengeneinheiten von Z_1 , Z_2 , R_1 und R_2 .

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.24:

Ein nach Gewinnmaximierung strebendes Unternehmen stellt zwei Endprodukte her. Die Absatzpreise für die beiden Produkte betragen 28 € pro Mengeneinheit (ME) für Produkt 1 und 20 €/ME für Produkt 2. Die variablen Kosten der beiden Produkte belaufen sich auf 13 €/ME für Produkt 1 und 9 €/ME für Produkt 2.

Von beiden Produkten können jeweils maximal 90 Mengeneinheiten am Markt abgesetzt werden.

Die beiden Produkte durchlaufen drei Maschinen. Die nachfolgende Tabelle gibt die Bearbeitungszeiten der beiden Produkte auf den jeweiligen Maschinen in Minuten an. Die Kapazität der drei Maschinen (ebenfalls in Minuten) ist der letzten Spalte zu entnehmen.

	P ₁	P ₂	Verfügbare Kapazität (in Minuten)
M ₁	200	100	20.000
M ₂	100	220	22.000
M ₃	100	100	12.000

Wie viele Mengeneinheiten von Produkt 1 (x_1) und von Produkt 2 (x_2) soll das Unternehmen herstellen? Beantworten Sie die Frage, indem Sie die nachfolgenden Teilaufgaben bearbeiten:

- Formulieren Sie die Zielfunktion!
- Formulieren Sie die Nebenbedingungen!
- Stellen Sie Zielfunktion und Nebenbedingungen graphisch dar und ermitteln Sie die optimale Lösung für x_1 und x_2 ! Wie hoch ist der Gewinn?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 3: „Folgen, Reihen und Grenzwerte“

Aufgabe 3.1: Charakterisierung von Zahlenfolgen

Welche der nachstehenden Zahlenfolgen sind arithmetisch, geometrisch, alternierend?

a) $(2 - 5n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) $(3 + (-1)^n \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $\left(\left(-\frac{3}{5} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$

d) $\left(3 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$

e) $((-1)^n \cdot (2 - 5n))_{n \in \mathbb{N}}$

f) $\left(\pi \cdot \frac{5}{3^{n+2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Aufgabe 3.2: Arithmetische und geometrische Folge

Gegeben seien die Folgenglieder $a_1 := 5$ und $a_{16} := 200$. Ergänzen Sie die fehlenden 14 Glieder so, dass sich a) eine arithmetische Folge und b) eine geometrische Folge ergibt. Geben Sie diese Folgen an!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 3: „Folgen, Reihen und Grenzwerte“

Aufgabe 3.3: Summen

Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $1 + 4 + 7 + \dots + 31$

b) $2 + 6 + 18 + \dots + 486$

c) $a^4 - a^7 + a^{10} - \dots - a^{31}$

Aufgabe 3.4: Eine arithmetische Folge

Bei einer arithmetischen Folge sei die Summe der ersten vier Glieder 14, die Summe der ersten acht Glieder -52 . Geben Sie die ersten zehn Glieder an!

Aufgabe 3.5: Eine geometrische Reihe

Gegeben sei eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{1}{7}$, dem Quotienten 2 und der Summe 73. Wie viele Glieder besitzt diese Reihe?

Aufgabe 3.6: Stiftung

Jemand stiftet 500.000 [€] mit der Bestimmung, dass der Betrag so lange bei einer Bank angelegt werden soll, bis die jährlichen Zinsen zur Zahlung von 5 Stipendien zu je 6.000 [€] jährlich ausreichen. Der Jahreszinssatz beträgt 5%.

Wie hoch müssen die Zinsen eines einzelnen Jahres sein, damit die Stipendien gezahlt werden können? Nach wieviel Jahren können diese Stipendien zum ersten Mal ausgezahlt werden, d.h., nach wieviel Jahren (n) reicht der Jahreszinsbetrag erstmals aus, um die Stipendien auszuzahlen?

Aufgabe 3.7: Weltreserven Silber

Die Weltreserven an Silber wurden 1980 auf 10.000 Mill. Unzen geschätzt. Der Verbrauch an Silber betrug 1980 etwa 306 Mill. Unzen. Nach wieviel Jahren werden die Weltreserven an Silber aufgebraucht sein, wenn unterstellt wird, dass der Silberverbrauch jährlich um 2,33% wächst?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 3: „Folgen, Reihen und Grenzwerte“

Aufgabe 3.8: Sparbuch

Ein Kapital von 5.000 € wird zu Beginn eines Jahres auf einem Sparbuch festgelegt. Auf wieviel € hat sich das Kapital in vier Jahren vermehrt, wenn das Kapital mit 10% p.a. verzinst wird und die Zinsen jeweils am Jahresende dem Kapital zugeschlagen werden?

Aufgabe 3.9: Unternehmung XYZ

Eine Unternehmung XYZ produziert während ihres Gründungsjahres 25 Einheiten eines Gutes und es gelte:

- a) Die Produktion werde jedes Jahr um 5 Einheiten erhöht.
- b) Jedes Jahr nehme die Produktion im Vergleich zur Produktion des Vorjahres um 10% zu.

Berechnen Sie getrennt für a) und b):

- 1. Wie viele Einheiten hat die Unternehmung im 12. Jahr nach ihrer Gründung produziert?
- 2. Wie viele Einheiten hat die Unternehmung in den 12 Jahren insgesamt produziert?
- 3. Nach wieviel Jahren übersteigt die einzelne Jahresproduktion erstmalig die 100-Einheiten-Grenze?
- 4. Nach wieviel Jahren überschreitet die Gesamtproduktion erstmalig 1000 Einheiten?

Beantworten Sie die nachfolgenden Zusatzfragen. Die beiden Fragen können nur iterativ gelöst werden. Nutzen Sie dazu die Ergebnisse aus den ersten vier Aufgabenteilen.

- 5. Nach wieviel Jahren liegt die Jahresproduktion der Unternehmung unter der Annahme b) erstmalig oberhalb der Jahresproduktion unter der Annahme a)?
- 6. Nach wieviel Jahren liegt die Gesamtproduktion der Unternehmung unter der Annahme b) erstmalig oberhalb der Gesamtproduktion unter der Annahme a)?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 3: „Folgen, Reihen und Grenzwerte“

Aufgabe 3.10: Grenzwerte von Zahlenfolgen

Bestimmen Sie, falls möglich, die Grenzwerte der Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren n -tes Glied jeweils nachstehend angegeben ist:

a) $a_n := \frac{3n-2}{1-2n}$

b) $a_n := \frac{5n}{1-2n^2}$

c) $a_n := \frac{1-n^2}{3+2n}$

d) $a_n := \frac{n^2-1}{2 \cdot n + n \cdot \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

e) $a_n := \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$

f) $a_n := \frac{\sqrt[8]{n^4 - 3 \cdot n^{12} + 256 \cdot n^{16}} - \sqrt[3]{216 \cdot n^6 + 204 \cdot n^5}}{\sqrt[4]{112 \cdot n^7 + 256 \cdot n^8 - 52 \cdot n^2} + \sqrt[2]{9 \cdot n^4 - 27 \cdot n^3}}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 4: „Funktionen“

Aufgabe 4.1: Definitionslücken, Nullstellen, Beschränktheit und Bijektivität

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Definitionslücken, Nullstellen und Beschränktheit! Sind die Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv? Skizzieren Sie graph f!

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \frac{2 \cdot x}{2 - x}$

b) $f:] -1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f(x) = \ln(x + 1)$

Aufgabe 4.2: Grenzwerte von Funktionen

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

an der Stelle $x_0=2$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x) = \frac{4 \cdot x^2 - 3}{3 \cdot x^2 + 1}$$

wenn x unbegrenzt anwächst (d.h. für $x \rightarrow \infty$).

Aufgabe 4.3: Grenzwerte von Funktionen

Berechnen Sie die nachstehenden Grenzwerte von Funktionen:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{|x + 1|}{x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} x \cdot 3^{\frac{1}{x+1}}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 4: „Funktionen“

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

Aufgabe 4.4: Stetigkeit von Funktionen

Bestimmen Sie die Menge M derjenigen Punkte x_0 , für die die nachfolgende Funktion einen Grenzwert besitzt! Ist die Funktion stetig?

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x-1) \cdot (x+3)}$$

Aufgabe 4.5: Kostenfunktionen

Die Gesamtkostenfunktion einer Unternehmung sei:

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x) = x^3 - 8 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 50$$

Bestimmen Sie

- a) die totalen Stückkosten k als Funktion von x
- b) die variablen Gesamtkosten K_v als Funktion von x
- c) die variablen Stückkosten k_v als Funktion von x
- d) die Grenzkostenfunktion $f'(x)$ (siehe Kapitel 4)

Aufgabe 4.6: Break-Even-Analyse

Gegeben ist die folgende Preis-Absatz-Funktion:

$$p: [0; 2000] \rightarrow [0; 40] \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = p(x) = 40 - 0,02 \cdot x$$

Die Gesamtkostenfunktion lautet:

$$K: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = K(x) = 8 \cdot x + 9912$$

Ermitteln Sie die Umsatzfunktion und die Gewinnfunktion! Berechnen Sie anschließend den Break-Even! Skizzieren Sie Gesamtkosten-, Umsatz- und Gewinnfunktion!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.1: Ableitungen

Bestimmen Sie die erste Ableitung der nachfolgenden Funktionen!

a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_1(x) = -3 \cdot x^5 + 5 \cdot x^3 - x^2 + x$

b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_2(x) = (x+2) \cdot \sqrt{x^2+1}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_3(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_4(x) = \sqrt[5]{3-x^2+x^3}$

e) $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_5(x) = (x-1) \cdot e^{-x^2}$

f) $f_6 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_6(x) = 2 \cdot e^x + 3 \cdot \ln x$

g) $f_7 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_7(x) = (\ln x) \cdot (e^x + 2 \cdot x)$

h) $f_8 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_8(x) = \frac{2 + \ln x}{e^x + x^2}$

Aufgabe 5.2: Ableitungen

Berechnen Sie die erste Ableitung der nachstehenden Funktionen:

a) $f_1 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_1(x) = e^{x \cdot \ln x}$

b) $f_2 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_2(x) = \sqrt[3]{2 \cdot x^2 + x \cdot \ln x}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_3(x) = \frac{x^2 - x}{e^{-x^2} + \ln(x^2 + 1)}$

d) $f_4 :]-1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_4(x) = \sqrt[5]{x \cdot e^{-x^2} + \ln(x+1)}$

e) $f_5 :]1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_5(x) = \ln(\ln x)$

f) $f_6 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_6(x) = x^x$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.3: Ableitungen

Berechnen Sie die Ableitungen 1., 2. und 3. Ordnung der nachstehenden Funktionen:

- a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_1(x) = x^5 - 3 \cdot x^3$
- b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_2(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-x}$
- c) $f_3 :]-1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_3(x) = x \cdot \ln(x + 1)$

Aufgabe 5.4: Differential

Bestimmen Sie zu der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow y = f(x) = x^2 + 8 \cdot x$$

- 1. die absolute Änderung $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- 2. das vollständige Differential $df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$

beim Übergang von der Stelle $x_0=1$ zur Stelle $x_0+\Delta x$ mit $\Delta x=1$ bzw. $\Delta x=2$ bzw. $\Delta x=5$.
Vergleichen Sie anschließend die jeweiligen Werte von $\Delta f(x_0, \Delta x)$ und $df(x_0, \Delta x)$!

Aufgabe 5.5: Kurvendiskussion

Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Beschränktheit, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Monotonie- und Krümmungsverhalten!

- a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_1(x) = x^4 - x^2$
- b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_2(x) = \frac{6 \cdot x^2 + 10}{x^2 - 1}$
- c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_3(x) = -x^3 + 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 6$
- d) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_4(x) = 5 \cdot e^{-(x-2)^2}$
- e) $f_5 : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \rightarrow y = f_5(x) = x^3 + \frac{48}{x^2}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.6: Eine Produktionsfunktion

Gegeben sei die *Produktionsfunktion*

$$f :]0; 3 + \sqrt{15}[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad r \rightarrow x = f(r) = 6 \cdot r + 6 \cdot r^2 - r^3$$

- a) Ist die Produktionsfunktion *homogen*?
- b) Bestimmen Sie die *Grenzertragsfunktion* und die *Durchschnittsertragsfunktion*!
- c) Berechnen Sie die Menge r_0 des Einsatzfaktors, für die der *Durchschnittsertrag maximal* ist! Welches ist der zugehörige *Ertrag*?
- d) Zeigen Sie, dass an der Stelle r_0 die Funktionswerte der *Durchschnittsertrags- und der Grenzertragsfunktion* gleich sind! (Man sagt hierfür auch: Im Durchschnittsertragsmaximum ist der Durchschnittsertrag gleich dem Grenzertrag.)

Aufgabe 5.7: Cournot'sches Theorem

Ein Monopolist produziere ein Gut, dessen *Preis-Absatz-Funktion* am Markt

$$h :]0; 87,5[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = h(x) = 700 - 8 \cdot x$$

sei. Für die Herstellung der Ausbringungsmenge x entstehen dem Monopolisten Kosten, die durch die *Gesamtkostenfunktion*

$$f :]0; 87,5[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K = f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 100$$

gegeben seien.

Bestimmen Sie die „*gewinnmaximale*“ *Ausbringungsmenge* x_0 mit Hilfe des Cournot'schen Theorems! Sind die hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen eines relativen Maximums erfüllt? Wie hoch ist der maximal erzielbare *Gewinn*?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.8: Gewinnmaximierung

In einem Betrieb sei die Herstellung der wöchentlich produzierten Menge x eines Gutes mit den durch die Funktion

$$f : [0; 80] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K = f(x) = 0,2 \cdot x^3 - 6,5 \cdot x^2 + 61,6 \cdot x$$

gegebenen *Gesamtkosten* verbunden. Die *Nachfragefunktion* für dieses Gut sei

$$h^{-1} : [0; 40] \rightarrow [0; 80] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h^{-1}(p) = 80 - 2 \cdot p ;$$

wobei p der Preis pro Mengeneinheit dieses Gutes ist.

Welche Menge x soll der Betrieb produzieren, wenn *Gewinnmaximierung* angestrebt wird? Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn?

Aufgabe 5.9: Noch eine Produktionsfunktion und ein Gewinnmaximum

Für die Herstellung eines Gutes gilt die *Produktionsfunktion*

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad r \rightarrow x = f(r) = -20 + 0,1 \cdot r$$

mit x als Ausbringungsmenge [ME] und r als Faktoreinsatzmenge [FE]. Der *Faktorpreis* für eine Einheit r beträgt 2 GE/FE. Zur Produktion dieses Gutes muss eine Maschinenhalle gemietet werden, für die *Kosten* in Höhe von 300 GE anfallen.

Aus Marktforschungen ergab sich *folgende Preis-Absatz-Funktion*:

$$h : [0; 55] \rightarrow [0; 220] \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = h(x) = 220 - 4 \cdot x$$

- Bestimmen Sie die *Gesamtkosten*- und die *Grenzkostenfunktion*!
- Welche *Produktionsmenge* ist *kostenminimal*?
- Bestimmen Sie die *Umsatz*- und die *Grenzumsatzfunktion*!
- Wieviel würden Sie als Unternehmerin bzw. Unternehmer produzieren, und wie hoch wäre bei dieser Menge Ihr realisierter Gewinn? Handelt es sich hierbei um ein *Gewinnmaximum* in der vollständigen Konkurrenz oder im Monopol?
- Welcher Preis würde für die unter d) ermittelte Ausbringungsmenge verlangt werden?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.10: Steuern

Es sei

$$g: [0; 27, \overline{3}] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow U = g(x) = -3 \cdot x^2 + 82 \cdot x$$

die *Umsatzfunktion* und

$$f: [0; 27, \overline{3}] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K = f(x) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 10$$

die *Gesamtkostenfunktion* eines Monopolisten, wobei x [ME] die Anzahl der in der betrachteten Periode abgesetzten Mengeneinheiten des betreffenden Gutes sei.

Der Staat beabsichtige, jede am Markt verkaufte Mengeneinheit des Gutes mit einem Steuersatz von t [GE/ME] zu belegen. Diese *Steuer* ist vom Monopolisten zu zahlen.

Welchen Steuersatz t soll der Staat festsetzen, wenn er seine Steuereinnahmen maximieren will und er annimmt, dass der Monopolist unter Berücksichtigung der zu zahlenden Steuern seinen Gewinn maximieren wird?

Aufgabe 5.11: Ein Monopolist

Ein Monopolist habe die folgende *Gewinnfunktion* in Abhängigkeit von der Menge x :

$$G: [0; 8] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow G(x) = -8,4 \cdot x^2 + 33,6 \cdot x - 3$$

Zusätzlich gelte die folgende *Gesamtkostenfunktion*:

$$K: [0; 8] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K(x) = 3,4 \cdot x^2 + 6,4 \cdot x + 3$$

- Ermitteln Sie die *gewinnmaximale Absatzmenge* und berechnen Sie für diese die Höhe der *Grenzkosten* und *Durchschnittskosten*!
- Ermitteln Sie die *Umsatzfunktion* und bestimmen Sie die *Preis-Absatz-Funktion* $p(x)$!
- Bestimmen Sie die *Nachfragefunktion* $x(p)$! Wie groß ist die *Preiselastizität der Nachfrage* im Gewinnmaximum?
- Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.12: Kostenfunktion und Elastizitäten

Die *Nachfragefunktion* eines Unternehmens lautet in Abhängigkeit vom Preis p

$$h^{-1} : [0; 25] \rightarrow [0; 100] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h^{-1}(p) = 100 - 4 \cdot p$$

Die *Produktionsfunktion* des Unternehmen gibt die Ausbringungsmenge x [ME] in Abhängigkeit von der Faktoreinsatzmenge r [FE] wieder:

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad r \rightarrow x = f(r) = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{7}} \cdot r$$

Der *Faktorpreis* für eine Einheit r beträgt 2 GE/FE und die *Fixkosten* 14 GE.

- Berechnen Sie die *Kostenfunktion*!
- Stellen Sie die Funktion auf, die die *Preiselastizität der Nachfrage* wiedergibt!
- Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich?

Aufgabe 5.13: Prohibitivpreis und Sättigungsmenge

Die *Nachfragemenge* x_N eines Gutes ist linear abhängig vom Preis p dieses Gutes, und es gelten folgende Aussagen:

Der *Prohibitivpreis* (das ist der Preis, bei dem die Nachfragemenge gerade null ist) dieses Gutes ist 68 € je Stück. Die *Sättigungsmenge* (das ist die Menge, die bei einem Preis von null nachgefragt wird) beträgt 34 Stück.

Das Angebot an diesem Gut wird bestimmt durch die *Angebotsfunktion*:

$$h : [0; \infty] \rightarrow [2; \infty] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = g(p) = 2 \cdot p^2 + \frac{23}{2} \cdot p + 2$$

- Wie lautet die *Nachfragefunktion* $x_N = f(p)$?
- Berechnen Sie *Gleichgewichtspreis* und *Gleichgewichtsmenge*!
- Wie groß ist die *Preiselastizität der Nachfrage* im Gleichgewicht?
- Wie groß ist die *Preiselastizität des Angebots* im Gleichgewicht?
- Bestimmen Sie für die Nachfragefunktion die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.14: Tic, Tric und Trac

Tic, Tric und Trac haben in Entenhausen einen Pizzastand eröffnet. Zunächst verkaufen sie jede Pizza für 5 €. Zwischen dem Preis und der abgesetzten Menge besteht folgender *Zusammenhang*:

$$h: D_h \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h(p) = \frac{-30 \cdot p + 450}{p + 25}$$

- Geben Sie den *Bereich für p* an (Definitionsbereich D_h), für den die nachgefragte Menge nicht negativ und daher ökonomisch sinnvoll ist!
- Wie viele Pizzen werden bei dem derzeitigen Preis verkauft?
- Bestimmen Sie die *Preiselastizität der Nachfrage*! In welchem Bereich liegt die Preiselastizität der Nachfrage für $p = 5$? Welche Aussage lässt sich über den *Umsatz* machen, wenn der Preis noch etwas erhöht wird?
- Bei welchem Preis ist die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich erreicht?

Aufgabe 5.15: Dauerlutscher

Tante Emma verkauft in ihrem Laden besonders große Dauerlutscher für $p = 5$ €. Ihr Neffe Erwin hat festgestellt, dass folgende *Abhängigkeit* der Nachfragemenge x vom Preis p besteht:

$$\ln\left(\frac{x}{2 \cdot p}\right) = -2 \cdot p$$

- Ermitteln Sie die *Preiselastizität der Nachfrage*!
- Wie groß ist die *Preiselastizität der Nachfrage* für den jetzigen Verkaufspreis von 5 € pro Dauerlutscher?
- Um wie viel ändert sich ungefähr die Nachfrage, wenn Tante Emma den Preis auf 4,95 € senkt (Angabe in %)?
- Bestimmen Sie die *Preisgrenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich!

Leider hat sich Erwin bei der Bestimmung der Nachfragefunktion total geirrt. In Wirklichkeit lautet die Nachfragefunktion:

$$p = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

- e) Wie groß ist die *Preiselastizität der Nachfrage* und die *Grenze* zwischen elastischen und unelastischen Bereich wirklich?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.16: Kartoffelanbau

Der Agrarökonom K. Dung hat sich dem biologisch-dynamischen Anbau von Kartoffeln verschrieben. Unter kurzfristigen Gesichtspunkten ist die *Menge der geernteten Kartoffeln* (x) ausschließlich von der eingesetzten Menge Mist (r) abhängig:

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad r \rightarrow x = f(r) = \sqrt{8 \cdot r + 16} - 4$$

Als gewinnmaximierender Unternehmer möchte K. Dung seine optimale Produktionsmenge pro Jahr berechnen. Die *Pacht für den Acker* beträgt dabei pro Erntejahr 10 GE (Fixkosten). Die *Einheit des Faktors* Mist kostet 2 GE.

K. Dung weiß, dass auf dem Markt für biologisch-dynamisch angebaute Kartoffeln vollständige Konkurrenz herrscht und der *Marktpreis* für dieses Produkt pro Mengeneinheit 10 GE beträgt.

- a) Bestimmen Sie die *Durchschnitts- und Grenzertragsfunktion*!
- b) Ermitteln Sie analytisch die *Gesamtkostenfunktion*!
- c) Bestimmen Sie die *Durchschnittskosten- und die Grenzkostenfunktion*! Zeigen Sie, dass im Durchschnittskostenminimum die Durchschnittskosten den Grenzkosten entsprechen!
- d) Bestimmen Sie die *Gewinnfunktion* und ermitteln Sie die *gewinnmaximale Outputmenge*!
- e) Wie hoch ist bei dieser Outputmenge Dungs *Gewinn* pro Jahr?

Aufgabe 5.17: Produktions- und Kostenfunktion

Die nachstehende Produktionsfunktion gibt die Ausbringungsmenge x [ME] in Abhängigkeit von der Faktoreinsatzmenge r [FE] wieder:

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad r \rightarrow x = f(r) = \sqrt{4 \cdot r + 12}$$

Der Faktorpreis für eine Einheit r beträgt 8 [€/FE]. Die fixen Kosten betragen 44 [€].

- a) Bestimmen Sie die *Faktorverbrauchsfunktion* als Umkehrung der Produktionsfunktion: $r = f^{-1}(x)$!
- b) Leiten Sie die *Kostenfunktion* in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x ab!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.18: Das Medikament

Ein mittelständisches Unternehmen hat als erstes auf der Welt ein neuartiges Medikament gegen eine bisher unheilbare Krankheit entwickelt und kann daher auf dem Markt als Monopolist auftreten. Das Medikament besteht vornehmlich aus dem Wirkstoff r . Die *Produktionsfunktion* lautet:

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad r \rightarrow x = f(r) = 4 \cdot r$$

Eine *Einheit des Wirkstoffes* kostet 16 Geldeinheiten (GE). Die *fixen Kosten* betragen 112 [GE]. Auf dem Markt steht das Unternehmen folgender *Nachfragefunktion* gegenüber:

$$h: [0; 40] \rightarrow [0; 20] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h(p) = 20 - 0,5 \cdot p$$

- Berechnen Sie die *Durchschnittsertragsfunktion* und die *Grenzertagsfunktion*!
- Wie lautet die *Faktorverbrauchsfunktion* $r = f^{-1}(x)$?
- Stellen Sie die *Kostenfunktion* auf! Wie hoch sind die *zusätzlichen Kosten*, die entstehen, wenn zusätzlich eine Einheit produziert wird?
- Wie lautet die *Preis-Absatz-Funktion* $p = h^{-1}(x)$?
- Bestimmen Sie die *Umsatzfunktion* in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x , und geben Sie den Preis an, für den der *Umsatz maximal* ist?
- Stellen Sie die *Gewinnfunktion* auf!
- In welchem Preisbereich arbeitet das Unternehmen mit Gewinn (*Break-Even-Analyse*)?
- Bestimmen Sie die *gewinnmaximale Ausbringungsmenge* und den maximalen Gewinn! Zu welchem *Preis* sollte eine Einheit des Medikaments angeboten werden?
- Wie hoch ist die *Preiselastizität der Nachfrage* im Gewinnmaximum? Interpretieren Sie den ermittelten Wert! (*Anmerkung*: Die Preiselastizität der Nachfrage ist definiert als $\varepsilon_{x,p} = dx/dp \cdot p/x$.)
- Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich, d.h. $\varepsilon_{x,p} = -1$?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.19: Gewinnfunktion und Elastizitäten

Ein Monopolist hat ein neuartiges Produkt erfunden, das er nun auf den Markt bringen möchte. Die Funktion $K(x)$ gibt die *Gesamtkosten* in € in Abhängigkeit von der Menge x an:

$$K: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K = 2 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 256$$

Die Marktforschungsabteilung des Monopolisten hat die folgende *Nachfragefunktion* in Abhängigkeit vom Preis p ermittelt:

$$h: [0; 50] \rightarrow [0; 100] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h(p) = 50 - 0,5 \cdot p$$

- a) Wie lautet die *Preis-Absatz-Funktion* $p = h^{-1}(x)$?
- b) Bestimmen Sie die *Umsatzfunktion* in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x !
- c) Stellen Sie die *Gewinnfunktion* auf!
- d) In welchem *Preisbereich* arbeitet das Unternehmen mit Gewinn (*Break-Even-Analyse*)?
- e) Bestimmen Sie die *gewinnmaximale Ausbringungsmenge* und den *maximalen Gewinn*! Zu welchem *Preis* sollte das Produkt angeboten werden?
- f) Wie hoch ist die *Preiselastizität der Nachfrage* im *Gewinnmaximum*? Interpretieren Sie den ermittelten Wert!

(Anmerkung: Die Preiselastizität der Nachfrage ist definiert als $\varepsilon_{x,p} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$.)

- g) Bei welchem Preis liegt die Grenze zwischen elastischem und unelastischem Bereich, d.h. $\varepsilon_{x,p} = -1$?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.20: Gewinnfunktion und Elastizitäten

Die *Gewinnfunktion* eines Monopolisten lautet in Abhängigkeit von der Menge x :

$$G: [0; 70] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow G(x) = -6 \cdot x^2 + 120 \cdot x - 100$$

Zusätzlich gilt die folgende *Gesamtkostenfunktion*:

$$K: [0; 70] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K(x) = 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 100$$

- Ermitteln Sie die *gewinnmaximale Absatzmenge* und berechnen Sie für diese die Höhe der *Grenzkosten* und *Durchschnittskosten*!
- Ermitteln Sie die *Umsatzfunktion* und bestimmen Sie die *Preis-Absatz-Funktion* $p = h(x)$!
- Wie lautet die *Nachfragefunktion* $x = h^{-1}(p)$?
- Wie hoch ist die *Preiselastizität der Nachfrage* im *Gewinnmaximum*? Interpretieren Sie den ermittelten Wert!

(Anmerkung: Die Preiselastizität der Nachfrage ist definiert als $\varepsilon_{x,p} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$.)

- Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich, d.h. $\varepsilon_{x,p} = -1$?

Aufgabe 5.21: Produktions- und Kostenfunktion

Die nachstehende Produktionsfunktion gibt die Ausbringungsmenge x [ME] in Abhängigkeit von der Faktoreinsatzmenge r [FE] wieder:

$$f: \mathbb{R}_{\geq 5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad r \rightarrow x = f(r) = \sqrt{10 \cdot r + 50} - 10$$

Der Faktorpreis für eine Einheit r beträgt 2 [€/FE]. Die fixen Kosten betragen 10 [€].

- Bestimmen Sie die Faktorverbrauchsfunktion als Umkehrung der Produktionsfunktion: $r = f^{-1}(x)$!
- Leiten Sie die Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x ab!
- Bestimmen Sie die Durchschnitts- und die Grenzkostenfunktion!
- Zeigen Sie analytisch, dass im Durchschnittskostenminimum die Durchschnittskosten den Grenzkosten entsprechen!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.22: Eisstand (Elastizitäten)

Mickey und Minnie haben in den Sommermonaten in Entenhausen einen Eisstand eröffnet. Dort verkaufen sie das Eis „Duck Spezial“ zunächst für 1 €. Zwischen dem Preis p und der abgesetzten Menge x besteht folgender *Zusammenhang*:

$$h: D_h \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h(p) = \frac{16 - p}{2 + p}$$

- a) Geben Sie den *Bereich für p* an (Definitionsbereich D_h), für den die nachgefragte Menge nicht negativ und daher ökonomisch sinnvoll ist!
- b) Wie viele *Portionen Eis* werden bei dem derzeitigen Preis verkauft?
- c) Bestimmen Sie die *Preiselastizität der Nachfrage*! In welchem Bereich liegt die Preiselastizität der Nachfrage für $p = 1$? Interpretieren Sie den ermittelten Wert!
(Anmerkung: Die Preiselastizität der Nachfrage ist definiert als $\varepsilon_{x,p} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$.)
- d) Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich?

Aufgabe 5.23: Inliner-Verleih (Elastizitäten)

Die Panzerknacker haben in Entenhausen einen Inliner-Verleih eröffnet. Dort verleihen sie das Paar Inliner zunächst für 8 € pro Tag. Zwischen dem Preis p und der Anzahl pro Tag verliehener Inliner-Paare x besteht folgender *Zusammenhang*:

$$h: [0; 12[\rightarrow]0; 288] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h(p) = 2 \cdot p^2 - 48 \cdot p + 288$$

- a) Wie viele *Paar Inliner* werden bei dem derzeitigen Preis pro Tag verliehen?
- b) Bestimmen Sie die *Preiselastizität der Nachfrage*! In welchem Bereich liegt die Preiselastizität der Nachfrage für $p = 8$? Interpretieren Sie den ermittelten Wert!
(Anmerkung: Die Preiselastizität der Nachfrage ist definiert als $\varepsilon_{x,p} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$.)
- c) Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich? (Anmerkung: Beachten Sie die Grenzen von Definitions- und Wertebereich!)

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.24: Gummibärchen

Tante Emma verkauft in ihrem Laden neben Dauerlutschern nun auch selbst hergestellte Gummibärchen zu einem Preis von $p = 2$ € die Tüte. Ihr Neffe Erwin hat wieder einmal die *Abhängigkeit* der Nachfragemenge x vom Preis p ermittelt:

$$\ln\left(\frac{x}{600 \cdot p}\right) = -2 \cdot p$$

- Formen Sie die oben angegebene implizit definierte Funktion so um, dass die Nachfragemenge x isoliert auf einer Seite des Gleichheitszeichen stehen bleibt (*explizit definierte Nachfragefunktion*)!
- Wie viele *Tüten Gummibärchen* verkauft Tante Emma bei dem derzeitigen Preis?
- Bestimmen Sie die *Preiselastizität der Nachfrage*! In welchem Bereich liegt die Preiselastizität der Nachfrage für $p = 2$? Interpretieren Sie den ermittelten Wert!
- Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich?

Aufgabe 5.25: Gewinnfunktion

In einem Betrieb sei die Herstellung der wöchentlich produzierten Menge x eines Gutes mit den durch die Funktion

$$f: [0; 40] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow K = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 20 \cdot x^2 + 92 \cdot x + 592$$

gegebenen *Gesamtkosten* verbunden. Die *Nachfragefunktion* für dieses Gut sei

$$h^{-1}: [0; 20] \rightarrow [0; 40] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h^{-1}(p) = 40 - 2 \cdot p ;$$

wobei p der Preis pro Mengeneinheit dieses Gutes ist.

- Wie lautet die *Preis-Absatz-Funktion* $p = h^{-1}(x)$?
- Bestimmen Sie die *Umsatzfunktion* in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x !
- Stellen Sie die *Gewinnfunktion* auf!
- Bestimmen Sie die *gewinnmaximale Ausbringungsmenge* und den *maximalen Gewinn*! Zu welchem *Preis* sollte die Unternehmung ihr Produkt anbieten?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.26: Luftmatratzen

Daniel Düsentrieb verkauft in den Sommermonaten in Entenhausen neuartige Luftmatratzen zu einem Preis von 8 € pro Stück. Zwischen dem Preis p und der abgesetzten Menge x besteht folgender *Zusammenhang*:

$$h: [0; 18[\rightarrow]0; 1.296] \quad \text{mit} \quad p \rightarrow x = h(p) = 4 \cdot p^2 - 144 \cdot p + 1.296$$

- a) Wie viele *Luftmatratzen* werden bei dem derzeitigen Preis verkauft?
- b) Bestimmen Sie die *Preiselastizität der Nachfrage*! In welchem Bereich liegt die Preiselastizität der Nachfrage für $p = 8$? Interpretieren Sie den ermittelten Wert!
- c) Bei welchem Preis liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich? (*Anmerkung*: Beachten Sie die Grenzen von Definitions- und Wertebereich!)

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.1: Einfache unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale bezüglich eines Intervalls I:

- a) $\int \frac{1}{2} x^4 dx$ für $x \in I \in \mathbb{R}$
- b) $\int (x^6 - x^4 + x^2 - x) dx$ für $x \in I \in \mathbb{R}$
- c) $\int \sqrt[3]{x} dx$ für $x \in I \in \mathbb{R}_{>0}$
- d) $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) dx$ für $x \in I \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6.2: Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale bezüglich des Intervalls I:

- a) $\int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3} dx$ für $x \in I \subset]-\sqrt[3]{2}; \infty[$ (Substitutionsregel Teil 1)
- b) $\int 3x \cdot \sqrt{1 - 2x^2} dx$ für $x \in I \subset]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}[$ (Substitutionsregel Teil 1)
- c) $\int \frac{(e^{-x} + 2)^3}{e^x} dx$ für $x \in I \subset \mathbb{R}$ (Substitutionsregel Teil 1)
- d) $\int x \cdot \ln x dx$ für $x \in I \subset \mathbb{R}_{>0}$ (Partielle Integration)
- e) $\int \frac{1}{(x-1) \cdot (x-2)} dx$ für $x \in I \subset \mathbb{R}_{>2}$ (Partialbruchzerlegung)

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.3: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

a) $\int_2^5 (2x + 3) \, dx$

b) $\int_1^3 (x^3 - x) \, dx$

c) $\int_1^3 \frac{x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 2x + 4}{x^2} \, dx$

d) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$

Aufgabe 6.4: Flächenberechnungen

- a) Berechnen Sie das Flächenstück, das durch die Gerade $y = 2x + 5$ und die Parabel $y = x^2 + 2$ begrenzt wird!
- b) Berechnen Sie das Flächenstück, das durch die Gerade $y = x + 4$ und die Parabel $y = x^2 + 4x$ begrenzt wird!

Aufgabe 6.5: Grenzkosten- und Gesamtkostenfunktion

Gegeben ist die Grenzkostenfunktion

$$k: [0; 10] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow k(x) = 12 - 8 \cdot x + 5 \cdot x^2$$

Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion K und die Durchschnittskostenfunktion d , wenn die Fixkosten 20 [GE] betragen!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.6: Grenzsatz- und Umsatzfunktion

Die Grenzsatzfunktion einer Unternehmung sei

$$u: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow u(x) = 18 - 6 \cdot x$$

Bestimmen Sie die Umsatzfunktion U und die Preisabsatzfunktion

$$g: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = g(x) !$$

Aufgabe 6.7: Konsumentenrente

Die Nachfrage nach einem Gut G sei durch die Preis-Absatz-Funktion

$$f: [0; 7] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = f(x) = 49 - x^2$$

charakterisiert. Bestimmen Sie die Konsumentenrente, falls

- a) die nachgefragte Menge des Gutes $x_1 = 3$ [ME] beträgt
- b) das Gut verschenkt wird!

Aufgabe 6.8: Produzentenrente

Wie hoch ist die Produzentenrente bei einer Angebotsfunktion

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = g(x) = 4 \cdot e^{\frac{x}{3}},$$

falls die abgesetzte Menge $x_0 = 3$ [ME] beträgt?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.9: Konsumenten- und Produzentenrente

Bei vollständiger Konkurrenz sei das Angebot durch die Angebotsfunktion

$$g: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = g(x) = 2 \cdot x + 2$$

und die Nachfrage durch die Preis-Absatz-Funktion

$$f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = f(x) = 37 - x^2$$

charakterisiert. Wie hoch ist im Gleichgewichtspunkt

- a) die Produzentenrente?
- b) die Konsumentenrente?

Aufgabe 6.10: Konsumenten- und Produzentenrente

Auf einem Markt, der durch vollständige Konkurrenz gekennzeichnet ist, sei die Nachfrage durch die folgende *Preis-Absatz-Funktion* gegeben:

$$f: [0; 80] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = f(x) = 400 - 5 \cdot x$$

Die *Angebotsfunktion* sei durch die folgende Funktion charakterisiert:

$$g: [0; 80] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = g(x) = 2 \cdot x - 20$$

- a) Wie hoch sind *Gleichgewichtspreis* und *Gleichgewichtsmenge*?
- b) Berechnen Sie die *Konsumentenrente* im Gleichgewichtspunkt!

Aufgabe 6.11: Konsumentenrente

Auf einem Markt, der durch vollständige Konkurrenz gekennzeichnet ist, sei die Nachfrage durch die folgende *Preis-Absatz-Funktion* gegeben:

$$f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = f(x) = 108 - 3 \cdot x^2$$

Bestimmen Sie die *Konsumentenrente*, falls die nachgefragte Menge des Gutes $x = 5$ Mengeneinheiten beträgt!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.12: Produzenten- und Konsumentenrente

Auf einem Markt, der durch vollständige Konkurrenz gekennzeichnet ist, sei die Nachfrage durch die folgende *Preis-Absatz-Funktion* gegeben:

$$f: [0; 33,3] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = f(x) = 200 - 6 \cdot x$$

Die *Angebotsfunktion* sei durch die folgende Funktion charakterisiert:

$$g: [0; 80] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = g(x) = 2 \cdot x + 40$$

- a) Wie hoch sind *Gleichgewichtspreis* und *Gleichgewichtsmenge*?
- b) Berechnen Sie die *Produzentenrente* im Gleichgewichtspunkt!
- c) Berechnen Sie die *Konsumentenrente* im Gleichgewichtspunkt!

Aufgabe 6.13: Produzentenrente

Wie hoch ist die Produzentenrente bei einer Angebotsfunktion

$$g: [0; 12] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = g(x) = 5 \cdot e^{\frac{x}{4}},$$

falls die abgesetzte Menge $x_0 = 4$ Mengeneinheiten beträgt?

Aufgabe 6.14: Konsumenten- und Produzentenrente

Auf einem Markt, der durch vollständige Konkurrenz gekennzeichnet ist, sei die Nachfrage durch die folgende *Preis-Absatz-Funktion* gegeben:

$$f: [0; 33,3] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = f(x) = 100 - 3 \cdot x$$

Die *Angebotsfunktion* sei durch die folgende Funktion charakterisiert:

$$g: [0; 50] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow p = g(x) = 2 \cdot x + 50$$

- a) Wie hoch sind *Gleichgewichtspreis* und *Gleichgewichtsmenge*?
- b) Berechnen Sie die *Produzentenrente* im Gleichgewichtspunkt!
- c) Berechnen Sie die *Konsumentenrente* im Gleichgewichtspunkt!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.1: Homogenität

Untersuchen Sie die nachstehend angegebenen Funktionen auf *Homogenität* und bestimmen Sie ihren Homogenitätsgrad!

a) $f_1 : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} \cdot x_2^{\frac{3}{4}}$

b) $f_2 : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f_2(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1^{\frac{3}{4}} \cdot x_2^{\frac{5}{4}}$

c) $f_3 : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f_3(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2}{x_1 + x_2}$

d) $f_4 : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f_4(x_1, x_2) = A \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$

Aufgabe 7.2: Partielle Ableitungen erster Ordnung

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die *partiellen Ableitungen* erster Ordnung:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f(x_1, x_2) = x_1^4 - 2 \cdot x_1^3 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2^3$

b) $f : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \ln x_2 + x_2 \cdot \ln x_1$

c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2}$

d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \rightarrow y = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}$

Aufgabe 7.3: Gradient

Berechnen Sie den *Gradienten* für folgende Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow y = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}$

b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow y = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.4: Hessesche Matrix

Bestimmen Sie für die folgende Funktionen die *Hessesche Matrix*!

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x_1, x_2) \rightarrow y = f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 4 \cdot x_2^4$$

Aufgabe 7.5: Differentiale

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x_1, x_2) \rightarrow y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2$$

- a) die *partiellen Differentiale*
- b) das *totale Differential*

beim Übergang vom Punkt $\mathbf{x}_0 = (3; -2)$ zum Punkt $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$ mit $\Delta \mathbf{x} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$

Aufgabe 7.6: Differentiale und Elastizitäten

Gegeben ist die *Nachfragefunktion*

$$x = f(p_1, p_2) = (2.000 - 5 \cdot p_1^2) \cdot \sqrt{p_2}$$

x ist die nachgefragte Menge des Gutes G_1 , p_1 der Preis je Mengeneinheit dieses Gutes und p_2 der Preis je Mengeneinheit des mit G_1 konkurrierenden Gutes G_2 .

- a) Bestimmen Sie für $(p_1, p_2) = (10; 100)$ und $dp_1 = 2$ und $dp_2 = -10$ die *partiellen Differentiale* d_1f und d_2f sowie das *vollständige Differential* df . Deuten Sie die für d_1f , d_2f und df erhaltenen Zahlenwerte ökonomisch!
- b) Bestimmen Sie die *partielle Elastizitätsfunktion* $\varepsilon_{f p_1}$ sowie die *Kreuzelastizitätsfunktion* $\varepsilon_{f p_2}$, und berechnen Sie $\varepsilon_{f p_1}(10; 100)$ und $\varepsilon_{f p_2}(10; 100)$. Deuten Sie die erhaltenen Zahlenwerte ökonomisch!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.7: Sandspielzeug

Tante Emma verkauft in der Sommersaison in ihrem Laden neben Dauerlutschern und Gummibärchen auch einfaches Sandspielzeug zum Preis von $p_1 = 10$ € pro Karton. Das Kinderkaufhaus direkt um die Ecke vertreibt ähnliches, aber hochwertigeres Spielzeug zum Preis von $p_2 = 20$ € pro Karton.

Neffe Erwin hat wieder einmal die Nachfrage x nach Tante Emmas Sandspielzeug ermittelt. Sie ist sowohl abhängig von Tante Emmas Preis p_1 als auch vom Preis p_2 des Kinderkaufhauses und lautet:

$$x = 100 \cdot p_2 - 200 \cdot p_1 + 8 \cdot p_1 \cdot p_2 + 400$$

- Wie viele *Kartons Sandspielzeug* verkauft Tante Emma bei den derzeitigen Preisen p_1 und p_2 ?
- Bestimmen Sie die *partiellen Elastizitäten der Nachfrage in bezug auf den Preis p_1 und in bezug auf den Preis p_2* (Elastizität $\varepsilon_{x p_1}$ sowie Kreuzelastizität $\varepsilon_{x p_2}$)! In welchen Bereichen liegen die Preiselastizitäten der Nachfrage für $p_1 = 10$ und $p_2 = 20$? Interpretieren Sie die ermittelten Werte!
- Bei welchem Preis p_1 liegt die *Grenze* zwischen elastischem und unelastischem Bereich? Unterstellen Sie, dass das Kinderkaufhaus seinen Preis von $p_2 = 20$ nicht verändern wird.

Aufgabe 7.8: Produktionsfunktion (Optimierung ohne Nebenbedingung)

Gegeben ist die *Produktionsfunktion*

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (r_1, r_2) \rightarrow x = f(r_1, r_2) = -4 \cdot r_1^2 + 24 \cdot r_1 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + 6 \cdot r_2 - r_2^2$$

mit x als Ausbringungsmenge und r_1 und r_2 als die eingesetzten Mengen der Produktionsfaktoren R_1 und R_2 .

- Bestimmen Sie die Kombination von r_1 und r_2 , für die der *Output x maximal* ist!
- Zeigen Sie mit Hilfe der *hinreichenden Bedingung* für lokale Extrema, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Produktions- bzw. Ertragsfunktion maximieren!
- Wie hoch ist der *maximale Output*?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.9: Zwei konkurrierende Güter (Optimierung ohne Nebenbedingung)

G_1 und G_2 sind zwei konkurrierende Güter. Die Nachfrage x_1 bzw. x_2 nach dem Gut G_1 bzw. G_2 sei gegeben durch die *Nachfragefunktionen*

$$(p_1, p_2) \rightarrow x_1 = f_1(p_1, p_2) = 200 \cdot (p_2 - p_1) - 500$$

$$(p_1, p_2) \rightarrow x_2 = f_2(p_1, p_2) = 25 \cdot (p_1 - 10 \cdot p_2) + 3.900$$

Dabei sind p_1 und p_2 die Verkaufspreise der Güter G_1 und G_2 .

Bei welchen Preisen p_1 und p_2 ist der *Gewinn maximal*, wenn die Stückkosten von G_1 7 [GE/ME] und die Stückkosten von G_2 11 [GE/ME] betragen? (*Anmerkung:* Stellen Sie die Gewinnfunktion in Abhängigkeit von den Preisen p_1 und p_2 auf!) Überprüfen Sie die hinreichenden Bedingungen!

Aufgabe 7.10: Die TITANIC AG (Optimierung mit und ohne Nebenbedingung)

Die TITANIC AG stellt Motor- und Segelyachten her. Der monatliche Gewinn G des Unternehmens ist abhängig von der *Menge* x_1 der hergestellten *Motorjachten* und der Menge x_2 der hergestellten *Segeljachten*.

$$G(x_1, x_2) = x_1 - 2,5 \cdot x_2 + 0,5 \cdot x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2 - 10)^2 + 68$$

- Berechnen Sie die *gewinnmaximale Anzahl* an Motorjachten x_1 und Segeljachten x_2 !
- Zeigen Sie mit Hilfe der *hinreichenden Bedingung* für lokale Extrema, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Gewinnfunktion maximieren!
- Berechnen Sie den *maximalen Gewinn*!

Die TITANIC AG hat einen Auftrag aquiriert, der sie zwingt, genau 20 Schiffe zu produzieren, wobei es gleichgültig ist, ob es sich dabei um Segel- oder Motorjachten handelt.

- Formulieren Sie die *lineare Nebenbedingung*!
- Berechnen Sie unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingung die *gewinnmaximalen Mengen an Motor- und Segeljachten*! Ist die mathematische Lösung sinnvoll?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.11: Werbung (Optimierung mit Nebenbedingung)

Ein Unternehmen möchte seine wöchentlichen Werbungsanstrengungen so durchführen, dass der wöchentlich erzielte Gewinn maximiert wird. Die Werbung kann entweder über Zeitungsanzeigen oder über das Fernsehen erfolgen. Eine *Anzeige* üblichen Formats in einer Zeitung kostet € 500, eine *Minute Werbefernsehen* kostet hingegen € 1.500. Für die wöchentliche Werbung stehen € 15.000 zur Verfügung. Sind x_1 bzw. x_2 die Anzahlen der wöchentlichen Anzeigen bzw. Werbeminuten, so ist bekannt, dass der erzielbare wöchentliche Gewinn G als Funktion von x_1 und x_2 durch

$$G(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1^2 - x_2^2 + 20 \cdot x_1 + 1.000.000$$

gegeben ist.

Wie ist der Werbeetat aufzuteilen, wenn *Gewinnmaximierung* angestrebt wird? Ist die mathematisch ermittelte Lösung ökonomisch sinnvoll? Was wäre die ökonomisch sinnvolle Lösung? Wie hoch ist der maximale Gewinn?

Aufgabe 7.12: Inliner und Skateboards

Das Unternehmen 2K produziert Inliner und Skateboards. Der tägliche *Gewinn* des Unternehmens ist abhängig von der Menge x_1 der hergestellten Inliner und der Menge x_2 der hergestellten Skateboards.

$$G(x_1, x_2) = -4 \cdot x_1^2 + 32 \cdot x_1 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 12 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2^2 + 40$$

- Berechnen Sie die *gewinnmaximale Anzahl* an Inlinern x_1 und Skateboards x_2 !
- Zeigen Sie mit Hilfe der *hinreichenden Bedingung* für lokale Extrema, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Gewinnfunktion maximieren!
- Wie hoch ist der *maximale Gewinn*!

In der bevorstehenden Sommerzeit fallen einige Mitarbeiter urlaubsbedingt aus. Pro Tag können jetzt nur noch maximal 20 von den rollenden Sportgeräten hergestellt werden, wobei es gleichgültig ist, ob es sich dabei um Inliner oder Skateboards handelt.

- Formulieren Sie die *lineare Nebenbedingung*!
- Berechnen Sie *unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingung* die *gewinnmaximalen Mengen* an Inlinern und Skateboards! Wie hoch ist der Gewinn jetzt?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.13: Drucker und Scanner

Das Unternehmen ESPON produziert Drucker und Scanner. Der tägliche *Gewinn* des Unternehmens ist abhängig von der Menge x_1 der hergestellten Drucker und der Menge x_2 der hergestellten Scanner.

$$G(x_1, x_2) = -1 \cdot x_1^2 + 10 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 20 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2^2 + 50$$

- a) Berechnen Sie die *gewinnmaximale Anzahl* an Druckern x_1 und Scannern x_2 !
- b) Zeigen Sie mit Hilfe der *hinreichenden Bedingung* für lokale Extrema, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Gewinnfunktion maximieren!
- c) Wie hoch ist der *maximale Gewinn*!

Aufgabe 7.14: Videorecorder und DVD-Player

Das Unternehmen SYNO produziert Videorecorder und DVD-Player. Der tägliche *Gewinn* des Unternehmens ist abhängig von der Menge x_1 der hergestellten Videorecorder und der Menge x_2 der hergestellten DVD-Player.

$$G(x_1, x_2) = -2 \cdot x_1^2 + 40 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 10 \cdot x_2 - 1 \cdot x_2^2 + 50$$

- a) Berechnen Sie die *gewinnmaximale Anzahl* an Videorecordern x_1 und DVD-Player x_2 !
- b) Zeigen Sie mit Hilfe der *hinreichenden Bedingung* für lokale Extrema, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Gewinnfunktion maximieren!
- c) Wie hoch ist der *maximale Gewinn*!

Im bevorstehenden Monat werden einige Produktionsanlagen generalüberholt. Pro Tag können jetzt nur noch maximal 50 von den High-end-Geräten hergestellt werden, wobei es gleichgültig ist, ob es sich dabei um Videorecorder oder DVD-Player handelt.

- d) Formulieren Sie die *lineare Nebenbedingung*!
- e) Stellen Sie zur Lösung des Problems einen Lagrange-Ansatz auf: Wie lautet die *Lagrange-Zielfunktion*? Welche *Dimension* besitzt der *Lagrange-Multiplikator* λ ?
- f) Zeigen Sie anhand der *notwendigen Bedingungen*, dass die optimale Lösung des Lagrange-Ansatz $x_1 = 23$ und $x_2 = 27$ lautet! Welchen Wert besitzt der Lagrange-Multiplikator λ ? Wie hoch ist der Gewinn jetzt?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.15: LUNA GmbH

Die LUNA GmbH produziert hochwertige Leuchten. Der tägliche *Gewinn* G des Unternehmens ist abhängig von der Menge x_1 der hergestellten Pendelleuchten und der Menge x_2 der hergestellten Deckenfluter.

$$G(x_1, x_2) = -2 \cdot x_1^2 + 80 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 10 \cdot x_2 - 3 \cdot x_2^2 + 50$$

- a) Berechnen Sie die *gewinnmaximale Anzahl* an Pendelleuchten x_1 und Deckenfluter x_2 !
- b) Zeigen Sie mit Hilfe der *hinreichenden Bedingung* für lokale Extrema, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Gewinnfunktion maximieren!
- c) Wie hoch ist der *maximale Gewinn*!

Im bevorstehenden Monat werden einige Produktionsanlagen generalüberholt. Pro Tag können jetzt nur noch maximal 28 Leuchten hergestellt werden, wobei es gleichgültig ist, ob es sich dabei um Pendelleuchten oder Deckenfluter handelt.

- d) Formulieren Sie die *lineare Nebenbedingung*!
- e) Stellen Sie zur Lösung des Problems einen Lagrange-Ansatz auf: Wie lautet die Lagrange-Zielfunktion? Welche Dimension besitzt der Lagrange-Multiplikator λ ?
- f) Zeigen Sie anhand der *notwendigen Bedingungen*, dass die optimale Lösung des Lagrange-Ansatz $x_1 = 21$ und $x_2 = 7$ lautet!
- g) Welchen Wert besitzt der Lagrange-Multiplikator λ ? Wie hoch ist der Gewinn jetzt?

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.16: CHAIR & CO

Das Unternehmen CHAIR & CO produziert u.a. hochwertige Designer-Sessel und einfache, aber dennoch originelle Hocker. Der wöchentliche *Gewinn* G des Unternehmens ist abhängig von der Menge x_1 der hergestellten Sessel und der Menge x_2 der hergestellten Hocker.

$$G(x_1, x_2) = -2 \cdot x_1^2 + 60 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 42 \cdot x_2 - 3,5 \cdot x_2^2 + 305,5$$

Die noch freie Kapazität der Abteilung „Schreinerei“ ist knapp und beträgt pro Woche 29 Stunden. Ein Sessel benötigt in dieser Abteilung 2 Stunden, während ein Hocker in nur 1 Stunde zu fertigen ist.

- Formulieren Sie die *lineare Nebenbedingung*!
- Stellen Sie zur Lösung des Problems einen Lagrange-Ansatz auf: Wie lautet die *Lagrange-Zielfunktion*? Welche *Dimension* besitzt der *Lagrange-Multiplikator* λ ?
- Berechnen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes die *gewinnmaximale Anzahl* an Sesseln x_1 und Hockern x_2 !
- Welchen Wert besitzt der Lagrange-Multiplikator λ ?
- Bestimmen Sie für die Lagrange-Funktion die Hessesche Matrix! Berechnen Sie anschließend die Determinante der Hesseschen Matrix und zeigen Sie, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Lagrange-Funktion maximieren!
- Wie hoch ist der *maximale Gewinn*!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Aufgaben zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.17: WOOD & TOYS

Das Unternehmen WOOD & TOYS produziert hochwertiges Holzspielzeug für Kinder. Derzeitige Umsatzrenner des Unternehmens sind das sogenannte „Like a bike“, ein Holzroller in Form eines kleinen Fahrrades, sowie der klassische Puppenwagen. Der wöchentliche Gewinn G des Unternehmens ist abhängig von der Menge x_1 der hergestellten Holzroller und der Menge x_2 der hergestellten Puppenwagen:

$$G(x_1, x_2) = -2 \cdot x_1^2 + 80 \cdot x_1 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 40 \cdot x_2 - 8 \cdot x_2^2 + 300$$

Die noch freie Kapazität der Abteilung „Schreinerei“ ist knapp und beträgt pro Woche 30 Stunden. Ein Holzroller benötigt in dieser Abteilung 1 Stunde, ein Puppenwagen hingegen 2 Stunden.

- Formulieren Sie die *lineare Nebenbedingung*!
- Stellen Sie zur Lösung des Problems einen Lagrange-Ansatz auf: Wie lautet die *Lagrange-Zielfunktion*? Welche *Dimension* besitzt der *Lagrange-Multiplikator* λ ?
- Berechnen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes die *gewinnmaximale Anzahl* an Holzrollern x_1 und Puppenwagen x_2 !
- Welchen Wert besitzt der Lagrange-Multiplikator λ ?
- Bestimmen Sie für die Lagrange-Funktion die Hessesche Matrix! Berechnen Sie anschließend die Determinante der Hesseschen Matrix und zeigen Sie, dass die gefundenen Werte tatsächlich die Lagrange-Funktion maximieren!
- Wie hoch ist der *maximale wöchentliche Gewinn*!

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.1: Rechnen mit Klammern

- a) b
- b) $2m + q$
- c) $7x + 2y - 2z$
- d) $3a - 3b + 2c$
- e) $ac + 2bc$
- f) $-2x - 10yx$
- g) $2a^2 - 8b^2$

Aufgabe 1.2: Bruchrechnen

- a) 1
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{a + 4b}{3}$
- d) $\frac{3}{2x}$
- e) $-\frac{2}{3}$
- f) $\frac{bd}{xy}$
- g) $\frac{a}{b}$
- h) $x^2 - y^2$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.3: Absolutbetrag

- a) 4
- b) -4
- c) 25
- d) -5/6

Aufgabe 1.4: Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

- a) x^3
- b) $x^{\frac{1}{10}}$
- c) $x^2 \cdot y^3$
- d) $\frac{a \cdot b}{c^2 \cdot d^3}$
- e) x^{3n+m}
- f) $\frac{1}{x^6}$
- g) $\sqrt[15]{x^{19} \cdot y^7 \cdot z^{22}}$
- h) $a^{\frac{7}{8}}$
- i) $a^{\frac{2}{5}} \cdot b^{\frac{4}{15}}$
- j) $5 - 2 \cdot \sqrt{6} = 0,101$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

k) $\pm y$

l) $\frac{\pm 1}{m+2 \cdot n}$

m) x

n) $1 + \ln t - \ln y$

p) $3 \cdot \lg x + \frac{3}{2} \cdot \lg y - 6$

q) $-\frac{7}{6} \cdot \log_a r - \frac{1}{3} \cdot \log_a s + \frac{1}{2} \cdot \log_a t$

Aufgabe 1.5: Gleichungen in einer Variablen

a) $IL = \{2\}$

b) $IL = \{-4\}$

c) $IL = \{21\}$

d) $IL = \left\{-1; \frac{5}{4}\right\}$

e) $IL = \{3\}$

f) $IL = \{-4; 1\}$

g) $IL = \{7\}$

h) $IL = \{-12; 12\}$

i) $IL = \{1; 5\}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

j) $IL = \{13\}$

k) $IL = \{-5; -1; 1; 5\}$

l) $IL = \{-2; 2\}$

m) $IL = \{0; 1; 6\}$

n) $IL = \{-3; 1; 5\}$

p) $IL = \{-4; 1; 2; 3\}$

Aufgabe 1.6: Ungleichungen

a) $x < 2$

b) $x < 0 \vee x > 2$

c) $x > -3 \vee x < -8$

d) $x > 7 \vee x < -3$

e) $-6 < x < -2$

f) $6 < x < 8$

Aufgabe 1.7: Summenzeichen

a) 14

b) 27

c) 108

d) $49/6$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

e) 42

f) 15

g) 64

h) $\sum_{i=1}^{25} i$

i) $\sum_{m=4}^{24} m^3$ oder $\sum_{m=1}^{21} (m+3)^3$

j) $\sum_{i=2}^{10} a_i \cdot b_{i+1}$

k) $\sum_{i=2}^{20} (i+1) \cdot x^i \cdot y^{2i}$

Aufgabe 1.8: Gleichheit von Mengen (Mengenlehre)

$$A_2 = A_4 = A_{11} = A_{12} \text{ sowie } A_5 = A_7 \text{ und } A_6 = A_8 = A_{10}$$

Aufgabe 1.9: Element und Teilmenge (Mengenlehre)

Wahr sind die Aussagen b), d), e) und h), die übrigen Aussagen sind falsch!

Aufgabe 1.10: Operationen zwischen Mengen (Mengenlehre)

a) $\{4, 5, 8, 10\}$

b) $\{1, 6\}$

c) $\{10\}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.11: Studentenparlament (Mengenlehre)

15 Studenten

Aufgabe 1.12: Sprachkenntnisse (Mengenlehre)

a) 3 Bewerber

b) 5 Bewerber

Aufgabe 1.13: Einkunftsquellen von Studenten (Mengenlehre)

60 Studenten

Aufgabe 1.14: Graphen von Funktionen (Abbildungen)

Die Mengen R_3 bis R_8 und R_{10} lassen sich als Graphen von Funktionen auffassen.

- zu a): injektiv, surjektiv, bijektiv
- zu b): weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv
- zu c): nicht injektiv, aber surjektiv, nicht bijektiv
- zu d): injektiv, surjektiv, bijektiv
- zu e): injektiv, surjektiv, bijektiv
- zu f): injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv
- zu g): injektiv, surjektiv, bijektiv
- zu h): injektiv, surjektiv, bijektiv
- zu i): keine Abbildung
- zu j): nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv)

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 1: „Mathematisches Grundwissen“

Aufgabe 1.15: Definitions-, Bild- und Wertebereich (Abbildungen)

$$D_f = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$D_g = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$$

$$f[D_f] = \{y_1, y_3, y_5\}$$

$$f[D_g] = \{z_1, z_2, z_4, z_5\}$$

weder injektiv, noch surjektiv noch bijektiv

$$D_{g \circ f} = D_f$$

$$W_{g \circ f} = W_g$$

$$\text{graph } g \circ f := \{(x_1, z_1), (x_2, z_1), (x_3, z_4), (x_4, z_5), (x_5, z_5)\}$$

Aufgabe 1.16: Komposition von Funktionen (Abbildungen)

$$g(f(x)) = 3 \cdot (x^2 - 1) + 2$$

Aufgabe 1.17: Produktionsstraße (Abbildungen)

$$\text{graph } f := \{(m_1, n_1), (m_2, n_1), (m_3, n_2), (m_4, n_2)\}$$

nicht injektiv, aber surjektiv, nicht bijektiv

Aufgabe 1.18: Elektrizitätswerk (Abbildungen)

$$g(f(x)) = 5 + 0,3 \cdot (20 \cdot x^2 + 50 \cdot x) - 0,2 \cdot (20 \cdot x^2 + 50 \cdot x)^2 + 0,1 \cdot (20 \cdot x^2 + 50 \cdot x)^3$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.1:

$$A_{3 \times 3} + B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{3 \times 3} - A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 3} - B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2.2:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 10 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2.3:

$$x = 3 \text{ und } y = 2$$

Aufgabe 2.4:

$$X_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.5:

a) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) nicht möglich

c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

d) nicht möglich

e) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 2.6:

a) Rang = 2

b) Rang = 3

c) Rang = 3

Aufgabe 2.7:

a) universell lösbar (setze $x_3 = c$, dann $x_2 = -6 + 3c$ und $x_1 = 10 - 4c$)

b) unlösbar

c) eindeutig lösbar ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 0$)

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.8:

a) $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$

b) $x_1 = 5/3$ und $x_2 = -2$ und $x_3 = -1/3$

Aufgabe 2.9:

a) $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$

b) $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$

Aufgabe 2.10:

a) nicht invertierbar

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) nicht invertierbar

d)
$$\begin{bmatrix} -13 & 4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2.11:

a)
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.12:

$a = -1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = -2$, $e = 0,5$ und $f = 3$.

Aufgabe 2.13:

a) -23

b) 1

c) 0

d) 92

Aufgabe 2.14:

a) -2

b) 2

c) $1/2$

Aufgabe 2.15:

a) $A_{2 \times 2}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A_{3 \times 3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 2.16:

a) $x_1 = x_2 = x_3 = 10$

b) $x_1 = 20$, $x_2 = 25$ und $x_3 = 10$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.17:

- a) $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$
- b) $x_1 = 10$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 6$
- c) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 1$

Aufgabe 2.18:

- a) $x = 1$ und $y = 1$
- b) $x = 1$ und $y = \frac{3}{2}$

Aufgabe 2.19:

	E_1	E_2
R_1	19	15
R_2	16	19
R_3	20	21
R_4	16	8

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra**Lösungen zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“**

Aufgabe 2.20:

a)

	E ₁	E ₂
R ₁	11	10
R ₂	10	19

b) $k_1 = 62 \text{ €/ME}$ und $k_2 = 96 \text{ €/ME}$ c) $R_1: 160 \text{ kg}$, $R_2: 195 \text{ kg}$

d) Erlös = 1.300 €, Gewinn = 200 €

Aufgabe 2.21:a) $x_1 = 10$ und $x_2 = 20$ und $x_3 = 15$ b) $x_1 = 18$ und $x_2 = 12$ und $x_3 = 7$ **Aufgabe 2.22:**a) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) Schritt 1: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$ Schritt 2: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$ **Aufgabe 2.23:** $R_1 = 3.400$, $R_2 = 6.800$, $Z_1 = 1.800$, $Z_2 = 400$.

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 2: „Lineare Algebra“

Aufgabe 2.24:

a) $Z(x_1, x_2) = 15 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \rightarrow \max!$

b)

$$\begin{aligned} & 200 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 \leq 20.000 \\ \wedge & 100 \cdot x_1 + 220 \cdot x_2 \leq 22.000 \\ \wedge & 100 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 \leq 12.000 \\ \wedge & 0 \leq x_1 \leq 90 \\ \wedge & 0 \leq x_2 \leq 90 \end{aligned}$$

c) $x_1 = 80 \text{ ME}, x_2 = 40 \text{ ME}, Z = 1.640 \text{ €}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 3: „Folgen, Reihen und Grenzwerte“

Aufgabe 3.1: Charakterisierung von Zahlenfolgen

- a) arithmetisch
- b) weder noch
- c) geometrisch, alternierend
- d) weder noch
- e) alternierend
- f) geometrisch

Aufgabe 3.2: Arithmetische und geometrische Folge

- a) 5, 18, 31, 44, 57, 70, 83, 96, 109, 122, 135, 148, 161, 174, 187, 200
- b) 5; 6,39; 8,18; 10,46; 13,37; 17,1; 21,87; 27,96; 35,76; 45,73; 58,48; 74,78;
95,64; 122,3; 156,4; 200)

Aufgabe 3.3: Summen

- a) 176
- b) 728
- c) $a^4 \cdot \frac{1-a^{30}}{1+a^3}$

Aufgabe 3.4: Eine arithmetische Folge

11, 6, 1, -4, -9, -14, -19, -24, -29, -34

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 3: „Folgen, Reihen und Grenzwerte“

Aufgabe 3.5: Eine geometrische Reihe

9 Glieder

Aufgabe 3.6: Stiftung

Zinsen 30.000, 5 Jahre

Aufgabe 3.7: Weltreserven Silber

24,58 $\approx$ 25 Jahre

Aufgabe 3.8: Sparbuch

7.320,50

Aufgabe 3.9: Unternehmung XYZ

1. 80 bzw. 71,33
2. 630 bzw. 534,61
3. nach 16 bzw. 15,55 Jahren
4. nach 16 bzw. 16,89 Jahren
5. 16
6. 21

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 3: „Folgen, Reihen und Grenzwerte“

Aufgabe 3.10: Grenzwerte von Zahlenfolgen

a) $-3/2$

b) 0

c) $-\infty$

d) -2

e) 0

f) $-4/7$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 4: „Funktionen“

Aufgabe 4.2: Grenzwerte von Funktionen

- a) Der Grenzwert ist 4
- b) Der Grenzwert ist $4/3$

Aufgabe 4.3: Grenzwerte von Funktionen

- a) $\frac{8}{3}$
- b) 1
- c) existiert nicht
- d) 0

Aufgabe 4.4: Stetigkeit von Funktionen

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \rightarrow y = f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x-1) \cdot (x+3)} = \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(x-1) \cdot (x+3)}$$

$M = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich stetig und in $x_0 = 1$ stetig fortsetzbar.

Aufgabe 4.6: Break-Even-Analyse

$$x_1 = 420 \text{ und } x_2 = 1180$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.1: Ableitungen

a) $f'_1(x) = -15 \cdot x^4 + 15 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$

b) $f'_2(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + (x + 2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot x)$

c) $f'_3(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - (x + 2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot x)}{x^2 + 1}$

d) $f'_4(x) = \frac{1}{5} \cdot (3 - x^2 + x^3)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-2 \cdot x + 3 \cdot x^2)$

e) $f'_5(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + (x - 1) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2 \cdot x)$

f) $f'_6(x) = 2 \cdot e^x + \frac{3}{x}$

g) $f'_7(x) = \frac{1}{x} \cdot (e^x + 2 \cdot x) + (\ln x) \cdot (e^x + 2)$

h) $f'_8(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (e^x + x^2) - (2 + \ln x) \cdot (e^x + 2 \cdot x)}{(e^x + x^2)^2}$

Aufgabe 5.2: Ableitungen

a) $f'_1(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1)$

b) $f'_2(x) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x^2 + x \cdot \ln x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4 \cdot x + \ln x + 1)$

c) $f'_3(x) = \frac{(2 \cdot x - 1) \cdot (e^{-x^2} + \ln(x^2 + 1)) - (x^2 - x) \cdot \left(e^{-x^2} \cdot (-2 \cdot x) + \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1} \right)}{(e^{-x^2} + \ln(x^2 + 1))^2}$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra**Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“**

$$d) \quad f'_4(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(x \cdot e^{-x^2} + \ln(x+1) \right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2 \cdot x) + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$e) \quad f'_5(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f) \quad f'_6(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Aufgabe 5.3: Ableitungen

$$a) \quad f'_1(x) = 5 \cdot x^4 - 9 \cdot x^2$$

$$f''_1(x) = 20 \cdot x^3 - 18 \cdot x$$

$$f'''_1(x) = 60 \cdot x^2 - 18$$

$$b) \quad f'_2(x) = -e^{-x} \cdot (x-1)^2$$

$$f''_2(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 3)$$

$$f'''_2(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 + 6 \cdot x - 7)$$

$$c) \quad f'_3(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

$$f''_3(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'''_3(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.4: Differential

$$\Delta f(1,1) = f(2) - f(1) = 11 \quad \text{und} \quad df(1,1) = f'(1) \cdot 1 = 10$$

$$\Delta f(1,2) = f(3) - f(1) = 24 \quad \text{und} \quad df(1,2) = f'(1) \cdot 2 = 20$$

$$\Delta f(1,5) = f(6) - f(1) = 75 \quad \text{und} \quad df(1,5) = f'(1) \cdot 5 = 50$$

Aufgabe 5.5: Kurvendiskussion

a) Ableitungen: $f'_1(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x$

$$f''_1(x) = 12 \cdot x^2 - 2$$

$$f'''_1(x) = 24 \cdot x$$

Nullstellen: $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Extrema: $TP_1 = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{4}\right), \quad TP_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{4}\right), \quad HP = (0, 0)$

Wendepunkte: $WP_1 = \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, -\frac{5}{36}\right), \quad WP_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, -\frac{5}{36}\right)$

b) Ableitungen: $f'_2(x) = \frac{-32 \cdot x}{(x^2 - 1)^2}$

$$f''_2(x) = \frac{96 \cdot x^2 + 32}{(x^2 - 1)^3}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Nullstellen: keine

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$

Polstellen: $\lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x > +1}} f(x) = +\infty$ und $\lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x < +1}} f(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ und $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$

Extrema : HP = (0, -10)

Wendepunkte: keine

für $x \in]-\infty; -1[$ und $x \in]1; \infty[$: konvex

für $x \in]-1; 1[$: konkav

c) Ableitungen: $f'_3(x) = -3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 5$

$$f''_3(x) = -6 \cdot x + 4$$

$$f'''_3(x) = -6$$

Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Extrema: TP = (-0,79; -8,21), HP = (2,12; 4,06)

Wendepunkte: WP = (0,67; -2,07)

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

d) Ableitungen: $f'_4(x) = -10 \cdot e^{-(x-2)^2} \cdot (x-2)$

$$f''_4(x) = -10 \cdot e^{-(x-2)^2} \cdot [-2 \cdot (x-2)^2 + 1]$$

$$f'''_4(x) = -10 \cdot e^{-(x-2)^2} \cdot [4 \cdot (x-2)^3 - 6 \cdot (x-2)]$$

Nullstellen: keine

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Extrema: HP = (2; 5)

Wendepunkte: $WP_1 = (-\sqrt{0,5} + 2; 5 \cdot e^{-0,5})$

$WP_2 = (+\sqrt{0,5} + 2; 5 \cdot e^{-0,5})$

e) : Ableitungen: $f'_5(x) = 3 \cdot x^2 - \frac{96}{x^3}$

$$f''_5(x) = 6 \cdot x + \frac{288}{x^4}$$

$$f'''_5(x) = 6 - \frac{1.152}{x^5}$$

Nullstellen: $x_1 = -\sqrt[5]{48}$

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Polstelle: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ und $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty$

Extrema: TP = (2; 20)

Wendepunkte: $WP = (-\sqrt[5]{48}; 0)$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.6: Eine Produktionsfunktion

a) nicht homogen

c) $r_0=3$, $f(3)=45$

Aufgabe 5.7: Cournot'sches Theorem

$x_{\text{opt}}=20$, $G = 7.233,33$

Aufgabe 5.8: Gewinnmaximierung

$x_{\text{opt}}=18$

Aufgabe 5.9: Noch eine Produktionsfunktion und ein Gewinnmaximum

b) existiert nicht

d) $x_{\text{opt}} = 25$ und $G(25) = 1.800$

e) $p_{\text{opt}} = 120$

Aufgabe 5.10: Steuern

$t=40$

Aufgabe 5.11: Ein Monopolist

a) $x_{\text{opt}}=2$

c) $\varepsilon_{xp}=-3$

d) $p=20$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.12: Kostenfunktion und Elastizitäten

c) $p=12,5$

Aufgabe 5.13: Prohibitivpreis und Sättigungsmenge

a) $x = 34 - 0,5 p$

b) $p = 2, x = 33$

c) $\varepsilon_{x,p} = -1/33$

d) $\varepsilon_{x,p} = 13/11$

e) $p = 34$

Aufgabe 5.14: Tic, Tric und Trac

a) $p \in [0; 15]$

b) $x = 10$

c) $\varepsilon_{x,p} = -2/3$

d) $p = 6,62$

Aufgabe 5.15: Dauerlutscher

a) $\varepsilon_{x,p} = 1 - 2 p$

b) $\varepsilon_{x,p} = -9$

c) Die Nachfrage steigt um 9%.

d) $p = 1$

e) $\varepsilon_{x,p} = -2$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.16: Kartoffelanbau

c) $x = \sqrt{40}$

d) $x=16$

Aufgabe 5.18: Das Medikament

e) $p = 20$

g) $p_U = 12$ und $p_O = 32$

h) $x_{\text{opt}} = 9$, $p_{\text{opt}} = 22$ und $G(9) = 50$

i) $\varepsilon_{x,p} = -1,22$

j) $p = 20$

Aufgabe 5.19: Gewinnfunktion und Elastizitäten

d) $p_U = 68$ und $p_O = 92$

e) $x_{\text{opt}} = 10$, $p_{\text{opt}} = 80$ und $G(10) = 144$

f) $\varepsilon_{x,p} = -4$

g) $p = 50$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.20: Gewinnfunktion und Elastizitäten

- a) $x_{\text{opt}} = 10$, $K'(x) = 100$, $DK(x) = 70$
- b) $U(x) = -2 \cdot x^2 + 140 \cdot x$ und $p = -2 \cdot x + 140$
- c) $x = 70 - 0,5 \cdot p$
- d) $\varepsilon_{x,p} = -6$
- e) $p = 70$

Aufgabe 5.21: Produktions- und Kostenfunktion

- d) $x_{\text{opt}} = 10$; $DK = K' = 8$

Aufgabe 5.22: Eisstand (Elastizitäten)

- a) $[0; 16]$
- b) 5
- c) -0,4
- d) 4

Aufgabe 5.23: Inliner-Verleih (Elastizitäten)

- a) 32
- b) -4
- c) $p = 4$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 5: „Differentialrechnung I“

Aufgabe 5.24: Gummibärchen

b) ca. 22 Tüten

c) $\varepsilon_{x,p} = -3$

d) $p = 1$

Aufgabe 5.25: Gewinnfunktion

d) $x_{\text{opt}} = 24$, $p_{\text{opt}} = 8$ und $G_{\text{opt}} = 2.000$

Aufgabe 5.26: Luftmatratzen

a) $x = 400$

b) $x = -1,6$

c) $x = 6$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.1: Einfache unbestimmte Integrale

a) $F(x) = \frac{1}{10} \cdot x^5 + C$

b) $F(x) = \frac{1}{7} \cdot x^7 - \frac{1}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + C$

c) $F(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C$

d) $F(x) = e^x - \frac{1}{e^x} + C$

Aufgabe 6.2: Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale bezüglich des Intervalls I:

a) $F(x) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(x^3 + 2)^2} + C$

b) $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1 - 2 \cdot x^2)^3} + C$

c) $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot (e^{-x} + 2)^4 + C$

d) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot x^2 + C$

e) $F(x) = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.3: Bestimmte Integrale

- a) 30
- b) 16
- c) 25,14
- d) $\frac{1}{2}$

Aufgabe 6.4: Flächenberechnungen

- a) $\frac{32}{3}$
- b) $\frac{125}{6}$

Aufgabe 6.5: Grenzkosten- und Gesamtkostenfunktion

$$K(x) = 12 \cdot x - 4 \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x^3 + 20$$

$$d(x) = \frac{K(x)}{x} = 12 - 4 \cdot x + \frac{5}{3} \cdot x^2 + \frac{20}{x}$$

Aufgabe 6.6: Grenzumsatz- und Umsatzfunktion

$$U(x) = 18 \cdot x - 3 \cdot x^2$$

$$p = g(x) = \frac{U(x)}{x} = 18 - 3 \cdot x$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.7: Konsumentenrente

- a) 18 [GE]
- b) 228,67 [GE]

Aufgabe 6.8: Produzentenrente

Produzentenrente = 12

Aufgabe 6.9: Konsumenten- und Produzentenrente

Gleichgewichtspunkt $x_0 = 5$ und $p_0 = 12$

- a) Produzentenrente: 25 [GE]
- b) Konsumentenrente: 83,33 [GE]

Aufgabe 6.10: Konsumenten- und Produzentenrente

- a) *Gleichgewichtspreis* und *Gleichgewichtsmenge* $x = 60$ und $p = 100$
- b) *Konsumentenrente* im Gleichgewichtspunkt 9.000

Aufgabe 6.11: Konsumentenrente

Konsumentenrente: 250

Aufgabe 6.12: Produzenten- und Konsumentenrente

- a) *Gleichgewichtspreis* und *Gleichgewichtsmenge*: $x = 20$ und $p = 80$
- b) *Produzentenrente* im Gleichgewichtspunkt: 400
- c) *Konsumentenrente* im Gleichgewichtspunkt: 1200

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 6: „Integralrechnung“

Aufgabe 6.13: Produzentenrente

Produzentenrente: 20

Aufgabe 6.14: Konsumenten- und Produzentenrente

- a) *Gleichgewichtspreis* und *Gleichgewichtsmenge*: $x = 10$ und $p = 70$
- b) *Produzentenrente* im Gleichgewichtspunkt: 100
- c) *Konsumentenrente* im Gleichgewichtspunkt: 150

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.1: Homogenität

- a) homogen vom Grad $r = 1$
- b) homogen vom Grad $r = 2$
- c) homogen vom Grade $r = 2$
- d) homogen vom Grade $r = \alpha + \beta$

Aufgabe 7.2: Partielle Ableitungen erster Ordnung

a) $f_{x_1}(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1^3 - 6 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_2^3$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = -4 \cdot x_1^3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_1 \cdot x_2^2$$

b) $f_{x_1}(x_1, x_2) = \ln x_2 + \frac{x_2}{x_1}$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} + \ln x_1$$

c) $f_{x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2} + x_1 \cdot e^{x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2} \cdot (2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2} \cdot (2 \cdot x_1)$$

d) $f_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) \cdot 2 \cdot x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) \cdot 2 \cdot x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.3: Gradient

$$\text{a) } \text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} \\ \frac{x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} \\ \frac{-(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.4: Hessesche Matrix

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 & -2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \\ -2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 & 6 \cdot x_1 + 48 \cdot x_2^2 \end{bmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.5: Differentiale

$$d_1 f(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}) = f_{x_1}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta x_1 = (2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2) \cdot \Delta x_1 = (2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2)) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$d_2 f(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}) = f_{x_2}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta x_2 = (3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2) \cdot \Delta x_2 = (3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2)) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$d f(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}) = d_1 f(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}) + d_2 f(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f\left(\frac{7}{2}; -\frac{7}{4}\right) - f(3, -2) \\ &= \left[\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)^2 \right] - [3^2 + 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)^2] \\ &= 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

Die näherungsweise Berechnung der Änderung der Funktion mittels des totalen Differentials ($\frac{1}{4}$ statt die tatsächliche Änderung von 1) liefert hier einen absoluten Fehler von $\frac{3}{4}$.

Aufgabe 7.6: Differentiale und Elastizitäten

- a) $d_1 f = -2.000$, $d_2 f = -750$ und $df = -2.750$
(Bei Erhöhung von $p_1 = 10$ auf $p_1 = 12$ und bei Senkung von $p_2 = 100$ auf $p_2 = 90$ ist mit einem Absatzrückgang um 2.750 ME zu rechnen.)

b) $\varepsilon_{f p_1}(10; 100) = -\frac{2}{3}$

(Eine 1-prozentige Preiserhöhung des Gutes 1 bedeutet einen $\frac{2}{3}$ -prozentigen Absatzrückgang des Gutes 1!)

$$\varepsilon_{f p_2}(10; 100) = \frac{1}{2}$$

(Eine 1-prozentige Preiserhöhung des Konkurrenzgutes 2 bedeutet eine $\frac{1}{2}$ -prozentige Absatzerhöhung für Gut 1!)

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.7: Sandspielzeug

- a) *Kartons Sandspielzeug*: $x = 2000$
- b) *partiellen Elastizitäten der Nachfrage*: $\varepsilon_{x p_1} = -0,2$ und $\varepsilon_{x p_2} = 1,8$
- c) *Grenze zwischen elastischem und unelastischem Bereich*: $p_1 = 30$

Aufgabe 7.8: Produktionsfunktion (Optimierung ohne Nebenbedingung)

- a) Kombination von r_1 und r_2 , für die der *Output x maximal* ist: $r_1 = 5$ und $r_2 = 8$
- c) *Maximaler Output*: $x = 84$.

Aufgabe 7.9: Zwei konkurrierende Güter (Optimierung ohne Nebenbedingung)

Gewinnmaximale Preise $p_1 = 10$ und $p_2 = 15$.

Aufgabe 7.10: Die TITANIC AG (Optimierung mit und ohne Nebenbedingung)

- a) $x_1 = 9$ Motorjachten und $x_2 = 2$ Segeljachten
- c) *maximaler Gewinn* $G = 80$ GE
- d) *lineare Nebenbedingung* $x_1 + x_2 = 20$
- e) *gewinnmaximalen Mengen*: $x_1 = 13,5$ und $x_2 = 6,5$; ökonomisch nicht sinnvoll, da zusätzlich Ganzzahligkeit gefordert ist! *Deshalb*: $x_1 = 14$, $x_2 = 6$ oder $x_1 = 13$, $x_2 = 7$, $G = 9$

Aufgabe 7.11: Werbung (Optimierung mit Nebenbedingung)

$x_1 = 5$ Zeitungsanzeigen und $x_2 = 8$ Minuten Werbefernsehen

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.12: Inliner und Skateboards

- a) *gewinnmaximale Anzahl* an Inlinern und Skateboards $x_{1\text{opt}} = 11$ und $x_{2\text{opt}} = 14$
- b) *hinreichenden Bedingung* $D_1 = -8 < 0$ und $D_2 = 16 > 0$
- c) *maximaler Gewinn*: 300
- d) *lineare Nebenbedingung*: $x_1 + x_2 = 20$
- e) *gewinnmaximalen Mengen*: $x_{1\text{neu}} = 9$ und $x_{2\text{neu}} = 11$ sowie $G = 290$

Aufgabe 7.13: Drucker und Scanner

- a) *gewinnmaximale Anzahl* $x_1 = 20$ und $x_2 = 15$
- c) *maximaler Gewinn* $G = 300$

Aufgabe 7.14: Videorecorder und DVD-Player

- a) *gewinnmaximale Anzahl* an Videorecordern x_1 und DVD-Player x_2 :
 $x_1 = 25$ und $x_2 = 30$
- c) *maximaler Gewinn*: $G = 700$
- d) *lineare Nebenbedingung*: $x_1 + x_2 = 50$
- f) Lagrange-Multiplikator $\lambda = 2$
Gewinn: $G = 695$

Wirtschaftsmathematik - Analysis/Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel 7: „Differentialrechnung II“

Aufgabe 7.15: LUNA GmbH

- a) *gewinnmaximale Anzahl* an Pendelleuchten und Deckenfluter: $x_1 = 25$; $x_2 = 10$
- c) *maximaler Gewinn*: $G = 1.100$
- d) *lineare Nebenbedingung*: $x_1 + x_2 = 28$
- g) Lagrange-Multiplikator $\lambda = 10$; Gewinn: 1.065

Aufgabe 7.16: CHAIR & CO

- a) *lineare Nebenbedingung* $2 x_1 + 1 x_2 = 29$
- b) Dimension: λ : GE/Stunde
- c) *gewinnmaximale Anzahl* an Sesseln x_1 und Hockern x_2 : $x_1 = 11$ und $x_2 = 7$
- d) $\lambda = 15$
- e) $\det H = 40 > 0$
- f) *maximaler Gewinn*: $G = 1.000$

Aufgabe 7.17: WOOD & TOYS

- a) *lineare Nebenbedingung*: $1 x_1 + 2 x_2 = 30$
- b) Dimension λ : GE/Stunde
- c) *gewinnmaximale Anzahl* an Holzrollern x_1 und Puppenwagen x_2 :
 $x_1 = 20$ und $x_2 = 5$
- d) Lagrange-Multiplikator: $\lambda = 20$
- e) $\det H = 48 > 0$
- f) *maximale wöchentliche Gewinn*: $G = 1.500$